Universidade de Aveiro
2015

Departamento de Educação

Sara Alexandra
Andrade Vaz

Avaliação e Desenvolvimento do Pensamento Algébrico numa turma do 10.º ano

Universidade de Aveiro
2015

Departamento de Educação

Sara Alexandra Andrade Vaz

Avaliação e Desenvolvimento do Pensamento Algébrico numa turma do 10.º ano

Relatório de estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Teresa Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus avós, pais e irmã.

o júri

Presidente

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Helena Silva Sousa Martinho
Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho

Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

À Professora Doutora Teresa Neto, pelas sugestões, orientações e críticas e disponibilidade prestadas.

À Professora Mestre Isabel Órfão, pelas sugestões.

À doutoranda Lucia Suharman pela ajuda, sugestões e disponibilidade prestada.

Aos alunos que participaram no estudo.

À Direção da Escola, pela possibilidade de concretização do presente trabalho.

Aos meus pais e irmã por todo o carinho e apoio.

Ao Zé pelo apoio incondicional, carinho e motivação.

Aos meus amigos, pela compreensão das ausências e pelo apoio.

palavras-chave

Ensino Secundário, Álgebra, pensamento algébrico, erros.

Resumo

Este estudo pretende analisar os níveis de pensamento algébrico de alunos do 10.º ano de escolaridade. Para atingir esta finalidade, pretendo dar resposta às seguintes questões de investigação: i) Quais os níveis de pensamento algébrico mais comuns de alunos que frequentam uma turma do 10.º ano de escolaridade? ii) Quais os tipos de erros mais comuns que alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade cometem, na realização de tarefas de índole algébrica?

Considerando a natureza das questões de investigação, realizou-se um estudo de natureza qualitativa na modalidade de estudo de caso exploratório de uma turma que frequenta o 10º ano numa escola de Aveiro. Para isso, foram recolhidos dados através da resolução de tarefas realizadas pelos alunos, numa ficha de trabalho e num teste de avaliação.

Os resultados mostram que a maioria das respostas dadas pelos alunos estão no nível 1 e 2 de pensamento algébrico, no entanto, verifica-se que há evolução nos processos de pensamento algébrico dos alunos. É possível observar também que a maioria dos erros cometidos têm origem na utilização indevida de fórmulas ou procedimentos.

keywords Secondary School, Algebra, algebraic thinking, errors.

abstract

This study aims to analyse the algebraic thinking levels of students of the 10th grade. To achieve this purpose, I intend to answer the following research questions: i) What are the most common algebraic thinking levels of students attending a class in the 10th grade?
ii) What are the most common types of errors that students in a class of the 10th grade commit, in performing tasks of algebraic nature?

Considering the nature of research questions, we carried out a qualitative study on the exploratory case study method of a class that attends the 10th year in a school in Aveiro. For this, data was collected through solving tasks performed by the students in a worksheet and an evaluation test.

The results show that most of the answers given by students are at level 1 and 2 of algebraic thinking, however, it turns out that there is a development in the algebraic thinking processes of students. It is also possible to observe that most mistakes come from the improper use of formulas or procedures.

Índice

Índice de Figuras

Índice de tabelas

1. Introdução

Este capítulo expõe as motivações que me levaram a realizar este trabalho bem como a sua pertinência. Apresento também o problema a pesquisar, os objetivos do estudo e as questões de investigação a que pretendo dar resposta. Para além disto, explico como está organizado o presente trabalho.

1.1. Motivação e pertinência

Desde sempre considerei que a compreensão do raciocínio dos alunos era algo de extrema importância, uma vez que penso ser um fator que leva o professor a conseguir comunicar melhor com eles e possivelmente reduzir o insucesso escolar. Para além disso, as barreiras que eles enfrentam e os erros que eles cometem são também de ter em consideração, pois esses erros e essas barreiras poderão ser uma oportunidade de aprendizagem se houver reflexão sobre o erro cometido. Enquanto professora estagiária, tenho a preocupação de conseguir explicar os variados conceitos e procedimentos a todos os alunos de modo a que eles percebam, tendo que, para isso, procurar estratégias de intervenção pedagógica que desenvolvam o nível de pensamento algébrico dos mesmos. Estas razões levaram-me a querer investigar esta temática, tendo como objetivo ser uma melhor profissional no futuro.

Atendendo a que nas unidades curriculares de Prática de Ensino Supervisionada I e II fiz intervenções numa turma do Ensino Secundário (10.º ano do curso do Ciências e Tecnologias), decidi que seria esta a turma onde iria realizar o meu estudo.

O NCTM (2007) refere que os programas de ensino de todos os anos curriculares (do 1.º ao 12.º ano) têm como obrigação habilitar os alunos para: (i) a compreensão de padrões, de relações e de funções; (ii) o uso correto de símbolos algébricos, na representação e análise de situações e estruturas Matemáticas; (iii) o uso adequado de modelos matemáticos na representação e compreensão de relações quantitativas; (iv) a aproximação e interpretação das taxas de variação em diferentes contextos.

Para que os alunos aprofundem o conhecimento algébrico, é importante que os docentes recorram à tecnologia em sala de aula para o estudo de funções, pois "[a]o fazê-lo, [os estudantes] passarão a compreender o conceito de classe de funções e a aprender a identificar características das mesmas" (NCTM, 2007, p. 353).

No sentido de aprofundar esta investigação, senti necessidade de procurar o que é o pensamento algébrico. Assim, segundo Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) é "mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas" (p. 1). Já segundo Borralho e Barbosa (n. d.)

> "o pensamento algébrico diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modulação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado" (p. 1).

No último ano do Ensino Básico e no Ensino Secundário, é esperado que os alunos adquiram conhecimento sobre as estruturas e a abstração Matemática, devem compreender em pleno as propriedades algébricas que orientam a manipulação dos símbolos em expressões, equações e inequações, utilizando os recursos que forem mais apropriados à tarefa (NCTM, 2007).

Borralho e Barbosa (n.d.) consideram que uma das principais dificuldades dos alunos é a passagem da Aritmética para a Álgebra e, como tal, deve ser uma preocupação docente arranjar estratégias que desenvolvam o pensamento algébrico dos seus alunos.

No mesmo sentido, Nogueira (2010), mencionando Kieran (1992), salienta que uma das grandes dificuldades sentidas pelos alunos que entram para o Ensino Secundário é a transição do pensamento concreto para o abstrato. Tal situação cria-lhes obstáculos no desenvolvimento da capacidade de generalizar, resolver problemas e usar a simbologia adequada em tarefas. Outro problema detetado por Nogueira (2010) é que "nem todos os alunos adquirem muitas das capacidades previstas e […] precisam de prosseguir um plano de estudos com base nos conhecimentos e dificuldades que trazem do ciclo anterior" (p. 2).

Perante esta situação, Borralho e Barbosa (n.d.) destacam as soluções de Orton e Orton (1999), que referem a importância dos padrões para ajudar a desenvolver o pensamento algébrico, e de Arcavi (2006), que defende o desenvolvimento do sentido do símbolo para que haja uma progressão no pensamento algébrico dos alunos. Ou seja, é importante que os alunos tenham alguma familiaridade com tarefas que englobem o estudo de padrões e relações numéricas, a forma de os representar e generalizar por procedimentos distintos, durante todo o percurso escolar (Borralho & Barbosa, n.d.).

Borralho e Barbosa (n.d.) destacam ainda a opinião de Ponte (2005)[1] e de Day e Jones (1997). O primeiro menciona que para haver desenvolvimento do pensamento algébrico é preciso trabalhar com o cálculo algébrico, funções, lidar com estruturas Matemáticas, relações de ordem e de equivalência, e os segundos afirmam que o início do desenvolvimento do pensamento algébrico dá-se quando os alunos conquistam a capacidade de entender e construir relações entre variáveis.

Ponte (2005)[2] salienta ainda a importância do uso de diferentes tipos de tarefas em sala de aula para que se conseguiam abranger todos os objetivos curriculares. Assim, o autor separa as tarefas pelo grau de desafio (reduzido ou elevado) e pelo grau de estruturação (aberto ou fechado), em que "[u]ma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (Ponte, 2005, pp. 7-8).

Na minha opinião, o mais interessante em ser professor de Matemática, é fazer com que os alunos desenvolvam o seu raciocínio, conseguindo que eles pensem no abstrato e não apenas num caso em particular. Para isso, o professor tem como dever munir-se de estratégias que incentivem o pensamento algébrico dos alunos e dos diferentes tipos de tarefas que Ponte (2005) menciona.

De certo modo, o meu ponto de vista é baseado nos trabalhos de Godino, Aké, Gonzato, e Wilhemi (2012), uma vez que os autores consideram que a generalização é uma característica do pensamento algébrico, assim como as técnicas para modelar situações.

[1] Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.
[2] Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Quanto aos níveis do pensamento algébrico dos alunos, Godino et al. (2014, 2015) subdividem-nos em sete diferentes, sendo o primeiro o nível zero. Estes sete níveis de pensamento algébrico serão explicados mais à frente e serão uma base fundamental para a concretização deste trabalho.

1.2. Problema e questões de investigação

Com o intuito de perceber melhor as dificuldades sentidas pelos alunos do 10.º ano aquando a realização de tarefas de índole algébrica, decidi considerar para tema de investigação a "Avaliação e Desenvolvimento do Pensamento Algébrico numa turma do 10.º ano". Assim sendo, o problema de investigação foi formulado da seguinte maneira: *Qual o pensamento algébrico de alunos que frequentam o 10.º ano de escolaridade?*

Tendo como propósito investigar o problema acima referido, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

- Quais os níveis de pensamento algébrico mais comuns de alunos que frequentam uma turma do 10.º ano de escolaridade?
- Quais os tipos de erros mais comuns que alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade cometem, na realização de tarefas de índole algébrica?

Com este trabalho, espero contribuir para a evolução da investigação em Ensino da Matemática, mais particularmente, pretendo estudar o pensamento algébrico que os alunos têm para resolver tarefas de índole algébrica. A nível pessoal, ambiciono que o presente trabalho aumente os meus conhecimentos relativos ao pensamento que os alunos têm na resolução de tarefas de carácter algébrico, estando assim mais atenta a pormenores que em futura atividade profissional irei enfrentar.

1.3. Organização do estudo

Esta investigação está organizada em seis capítulos distintos.

No primeiro, exponho a motivação e pertinência do estudo, assim como o problema de investigação, as questões de investigação e a finalidade do estudo.

O segundo capítulo é constituído pela fundamentação teórica, aqui irei desenvolver os temas "Pensamento Algébrico", "Facetas e níveis de análise de processos de ensino em aprendizagem da Matemática", "Tipos de Erros no processo de aprendizagem da Álgebra", "Tecnologia na sala de aula". O primeiro irá ser subdividido em subtemas que irão explicar o que é o pensamento algébrico, qual a origem e as etapas dos processos algébricos e quais são e em que consistem os níveis de pensamento algébrico.

No terceiro capítulo apresento a metodologia usada neste estudo, falo das opções metodológicas tomadas, faço uma caracterização dos participantes, explico as fases do estudo e quais os instrumentos de recolha de dados utilizados.

No capítulo quatro, irei apresentar algum trabalho que foi feito no âmbito das Práticas de Ensino Supervisionadas (I e II), mais particularmente, duas planificações de aulas lecionadas por mim, sendo que estas são acompanhadas por uma breve reflexão final.

No capítulo cinco irei apresentar a análise e discussão dos dados, começando por examinar o nível de pensamento algébrico das respostas dadas às tarefas propostas nos dois instrumentos de recolha de dados, de seguida farei uma comparação das respostas que os alunos deram no teste e numa ficha de trabalho, irei avaliar de forma breve o nível de pensamento algébrico de cada participante do estudo, analisarei também a percentagem de respostas corretas, parcialmente corretas, erradas e de tarefas não respondidas e por último irei apresentar os principais erros cometidos pelos alunos.

No sexto capítulo apresentarei algumas considerações finais, onde irei fazer uma síntese do estudo, responder às questões de investigação e realizar uma reflexão final onde abordarei as limitações do estudo, as implicações que este trabalho me trouxe a nível profissional e darei algumas recomendações para futuras investigações na área.

Por fim, apresentam-se as referências bibliográficas e os anexos.

2. Fundamentação Teórica

Neste capítulo, apresentam-se perspetivas teóricas sobre diferentes temáticas, relacionando-se todas com o processo de aprendizagem da Álgebra. Assim, irei começar por explicar o que é o pensamento algébrico e qual a origem dos processos algébricos, de seguida abordarei os níveis e as etapas do pensamento algébrico. Irei referir os tipos de erros que os alunos cometem aquando da aprendizagem da Álgebra. Depois irei abordar o tema da influência do uso da tecnologia em sala da aula na aprendizagem dos alunos, uma vez que se pretende que os alunos do 10.º ano de escolaridade trabalhem com calculadoras gráficas.

2.1. Pensamento algébrico

Neste subcapítulo irei abordar a origem dos processos algébricos, irei explicar o que é o pensamento algébrico, os níveis de pensamento algébrico e as etapas dos processos algébricos, segundo o ponto de vista de vários autores.

2.1.1. Origem dos processos algébricos

Desde muito cedo os alunos se habituam a trabalhar com problemas de natureza aritmética. Esse estudo pode trazer consequências ao nível do trabalho com a Álgebra. Ruiz-Munzón, Bosh e Gascón (2011) mencionam que Bolea, Bosch e Gascón (2004) referem que uma das consequências do processo aritmético da Álgebra é a ausência da sua modelação.

No artigo de Ruiz-Munzón et al. (2011) são destacadas algumas características principais que Pilar Bolea (2003) referiu acerca da Álgebra elementar vista como aritmética generalizada: (i) a Álgebra elementar é realizada, na maioria das vezes, num contexto numérico; (ii) presume-se que as expressões algébricas pretendem apenas trabalhar com números desconhecidos; (iii) na escrita da expressão algébrica, separa-se os dados conhecidos dos desconhecidos; (iv) as tarefas algébricas são vistas apenas como uma manipulação formal de expressões e resolução de equações (*cálculo algébrico*); (v) tratam-se as equações como sendo igualdades numéricas que se verificam para alguns valores numéricos (as incógnitas).

Para Godino et al. (2012) a Álgebra vista como uma linguagem simbólica, fundamentalmente direcionada para resolver equações e estudar polinómios, aparece com grande intensidade entre os 12 e os 16 anos, não tendo continuidade com os temas anteriores de aritmética, geometria e medida.

Ruiz-Munzón et al. (2011), tendo em conta os seus trabalhos anteriores, consideram que o facto de os alunos não usarem instrumentos algébricos, traz-lhes dificuldades no próximo ciclo de estudos no que se refere ao processo da modelização algébrica-funcional, o que por sua vez dificulta o trabalho de quem faz questões problemáticas que poderiam dar sentido ao cálculo diferencial.

De acordo com Ruiz-Munzón et al. (2011), um problema aritmético é aquele que se pode resolver mediante simples operações aritméticas (executáveis a partir dos dados do problema que normalmente são quantidades conhecidas). Mencionando um trabalho de Gascón (1993), Ruiz-Munzón et al. (2011) consideram que são as operações aritméticas que permitem calcular a quantidade incógnita, no entanto são também as propriedades dos números e os cálculos elementares entre as quantidades que nos permitem descobri-la, justificá-la e interpretá-la.

Ruiz-Munzón et al. (2011) dão também importância aos programas de cálculo aritmético, ao que os autores denominam por PCA. Estes programas são "uma cadeia estruturada e hierarquizada de operações aritméticas que constituem a síntese do processo de resolução" (Ruiz-Munzón et al., 2011, p. 747).

Um PCA pode depender de argumentos numéricos (a_j) ou de incógnitas (x_i). Assim, pode-se generalizar e escrever PCA ($x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n$), havendo uma cadeia de operações entre os x_i e os a_j, com $i, j, m, n \in \mathbb{N}$.

Em contexto escolar, um PCA é conhecido pelo termo "expressão algébrica" e normalmente pretende modelizar e estruturar uma resolução de um problema aritmético (Ruiz-Munzón et al., 2011). Segundo os autores, para alunos entre os 12 e os 14 anos, devem apenas ser usados os problemas cujo PCA se simplifica da seguinte forma canónica:

$$\mathrm{PCA}(\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_m, a_0, \ldots, a_k) \equiv b_0 + \; b_1 n_1 + \ldots + b_m n_m \,,$$

com $n_i \in \mathbb{N}$ desconhecidos e $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ conhecidos.

2.1.2. O que é o pensamento algébrico?

Atualmente a Matemática encontra-se em diversas áreas e por isso é importante que os alunos desenvolvam métodos e ideias algébricas que os levem a resolver problemas (NCTM, 2007). A "[Á]lgebra é mais do que manipulação de símbolos" (NCTM, 2007, p. 40), assim sendo, o NCTM (2007) desenvolveu normas de Álgebra para os programas de ensino de todos os anos curriculares (do pré-escolar ao 12.º ano), deste modo, os docentes deverão preparar os alunos para: (i) entender padrões, funções e relações; (ii) representar e examinar, através de símbolos algébricos, situações e estruturas Matemáticas; (iii) compreender e representar relações quantitativas, recorrendo a modelos matemáticos; (iv) analisar a variação em contextos diversificados.

O estudo do pensamento algébrico é uma área que tem suscitado o interesse de vários autores. Foram muitos o que o tentaram caracterizar, e por isso, neste trabalho vou apresentar versões de autores diferentes.

De acordo com Nogueira (2010), Kieran (1992) diferencia duas versões da Álgebra no desenvolvimento do pensamento algébrico, são elas a *perspetiva processual* e a *perspetiva estrutural*. Na primeira, é dado destaque à substituição de variáveis por números, seguida das operações aritméticas que sejam necessárias. Na segunda, é dado realce ao trabalho com expressões algébricas. Deste modo, segundo Nogueira (2010), verifica-se que Kieran (1992) defende a criação de conexões entre a Aritmética e a Álgebra, uma vez que o início do raciocínio do aluno começa, geralmente, por uma abordagem processual, evoluindo depois para uma abordagem estrutural (Nogueira, 2010).

Kaput (1999) e Carolyn Kieran, mencionados por Canavarro (2007), referem que a generalização é um processo que leva o aluno a salientar o que é comum nos casos particulares que analisou, em que o foco já não são as situações, mas sim os padrões, procedimentos, estruturas e relações entre objetos. Deste modo, a Álgebra vai muito para além do uso de símbolos, é um modo de pensamento sobre as situações Matemáticas (Canavarro, 2010).

Segundo Matos et al. (2008), o pensamento algébrico envolve a habilidade dos alunos conseguirem encontrar relações entre os objetos, assim como a capacidade de generalizar, interpretar situações e resolver problemas. Deste modo, para estes autores, o pensamento algébrico não se trata apenas de resolver equações e manipular expressões.

Noutra vertente, Borralho e Barbosa (n. d.) defendem que o pensamento algébrico está explicitamente relacionado com o uso de símbolos, com a modulação e o estudo de estruturas. Assim sendo, as situações Matemáticas são representadas e analisadas à custa de símbolos algébricos, havendo também a necessidade do aluno compreender as relações entre objetos. Para estes autores, o pensamento algébrico implica que haja conhecimento, compreensão e uso de instrumentos simbólicos na resolução da tarefa, para além disto, exige também que sejam aplicados procedimentos formais para poder interpretar o resultado obtido.

Maria Blanton e James Kaput afirmam que o pensamento algébrico dos alunos é um processo que os leva a generalizar, necessitando recorrer inicialmente a casos particulares. Estas generalizações são feitas através de um discurso argumentativo, sendo que os educandos as revelam cada vez mais formais e ajustadas à sua idade (Canavarro, 2007).

Segundo Nogueira (2010), Kaput (1999) observou que muitas vezes os problemas algébricos propostos aos alunos tinham um carácter artificial, limitando-os assim na sua reflexão. O que acontece muitas das vezes é que os alunos decoram fórmulas e procedimentos que lhes permitem resolver as tarefas apresentadas, insistindo na aplicação de práticas rotineiras, não evoluindo assim o pensamento algébrico. Já segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o mesmo autor identificou cinco características do pensamento algébrico: (i) generalizar e formalizar padrões; (ii) trabalhar formalismos de forma orientada e sintática; (iii) analisar estruturas abstratas; (iv) estudar funções, relações e variação, envolvendo duas variáveis; (v) usar diferentes linguagens na modelação Matemática e no controlo de fenómenos.

Mais recentemente, Kaput (2008) agrega estas cinco características em dois aspetos essenciais: (i) a generalização simbólica de regularidades; (ii) o raciocínio e ações conduzidos através das generalizações no sistema de símbolos convencional. Quanto ao primeiro aspeto, o autor afirma que é o essencial da Álgebra, já o segundo, ele considera que são derivações do primeiro. Kaput (2008) salienta ainda a importância de estabelecer ligações entre a Álgebra e todos os restantes tópicos de ensino em Matemática.

Para Ponte et al. (2009), “o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções” (p. 10). Para além disso, abrange também a habilidade de saber manipular outras relações e estruturas Matemáticas, usando-as sempre que forem pertinentes. Segundo os mesmos autores, Arcavi (1994) também concorda com esta perspetiva, acrescentando que o pensamento algébrico inclui também a ideia de generalização. Deste modo Ponte et al. (2009) concluem que não só os objetos são importantes para o pensamento algébrico, mas também as relações estabelecidas entre eles, sendo que essas relações devem ser pensadas e representadas da forma mais geral possível.

Posto isto, Ponte et al. (2009), apresentam três vertentes fundamentais do pensamento algébrico: (i) representar, que se refere à capacidade que o aluno tem em usar diversos sistemas de representação; (ii) raciocinar (de forma dedutiva e indutiva), que se refere à capacidade do educando conseguir relacionar e generalizar; (iii) resolver problemas, que abrange a capacidade do aluno para utilizar diferentes representações de objetos algébricos.

Godino et al. (2014) propõem um modelo que caracterize o pensamento algébrico. Esse modelo separa o pensamento algébrico em sete níveis[3] distintos. Segundo Godino et al. (2015), os primeiros quatro níveis são mais ajustados ao Ensino Básico sendo os três seguintes mais adaptados para o Ensino Secundário.

Godino et al. (2012), também referem a importância dos processos de generalização para o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como as técnicas usadas para modelizar situações.

Tentando generalizar as ideias de diversos autores, Godino et al. (2015) salientam o consenso que parece haver em diferentes perspetivas: o processo de generalização Matemática e o estudo de relações de equivalência e das suas propriedades são características essenciais no pensamento algébrico.

Assim, “aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação” (Ponte et al., 2009, p. 10).

[3] A caracterização destes níveis será feita no ponto 2.1.3 do presente trabalho.

2.1.3. Níveis de pensamento algébrico

De acordo com Godino et al. (2012, 2014), atribui-se um nível dos processos algébricos não à pergunta colocada, mas sim à resposta do aluno. Para a análise do nível de pensamento algébrico da resposta do aluno, deve-se dar atenção aos objetos que resultam dos processos de generalização e particularização. Os autores denominam por *objeto intensivo* o que resulta dos processos de generalização e por *objetos extensivos* o resultado dos processos de particularização. Assim, os autores propõem que se analise o pensamento algébrico de acordo com os seguintes níveis:

Nível 0: Neste nível intervêm as respostas em que os educandos fazem operações com objetos particulares, a linguagem é natural, numérica, podendo recorrer a imagens ou gestos.

Nível 1: Neste nível são abrangidas as respostas em que os alunos trabalham apenas com o "número genérico", as propriedades da estrutura algébrica em $\mathbb{N}$ e a equivalência, ou seja, as respostas mostram um pensamento relacional.

Nível 2: Neste nível intervêm as respostas em que os estudantes trabalham com representações alfanuméricas de funções e equações.

Nível 3: Neste nível estão abrangidas as respostas em que os educandos fazem um tratamento com incógnitas e variáveis, utilizando para isso as propriedades estruturais, como a anulação e a substituição.

Nível 4: Neste nível encontram-se as respostas em que os estudantes fazem um estudo de uma determinada família de funções ou equações tendo em consideração os seus parâmetros.

Nível 5: Neste nível encontram-se as respostas em que os alunos fazem um tratamento de incógnitas, variáveis e parâmetros, apresentando a estrutura da solução emergente desse tratamento.

Nível 6: Neste nível intervêm as respostas em que os alunos realizam um estudo com estruturas algébricas, envolvendo as definições e propriedades estruturais que se relacionam com essa estrutura.

Os autores afirmam que o docente tem o dever de atuar em sala de aula de modo a ser o principal agente de mudança entre os níveis, podendo interferir para aumentar progressivamente o nível algébrico da atividade Matemática dos alunos.

De seguida irá ser apresentada a Tabela 1 que completa os níveis de pensamento algébrico supramencionados, mostrando exemplos que ajudam a perceber os referidos níveis. As respostas dadas pelos alunos apresentadas nesta tabela dizem respeito às cinco tarefas a seguir apresentadas:

Tarefa 1: Um estudante recebeu dos seus pais uma certa quantidade de dinheiro para comer durante 40 dias. No entanto, encontrou lugares onde podia poupar 4 euros por dia na comida. Desta forma, o dinheiro inicial durou 60 dias. Quanto dinheiro recebeu?

Adaptado de Godino et al. (2012)

Tarefa 2: Quantos palitos são necessários para formar a 4.ª figura? E para formar a figura que estiver na posição 20? Quantos palitos serão necessários para construir a figura que estiver na posição 100?

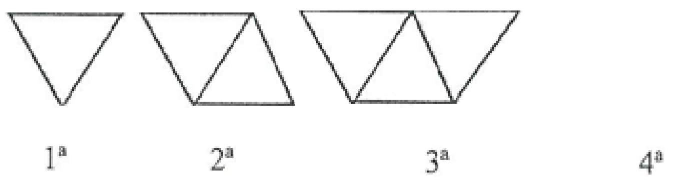


Figura 1: Sequência de palitos

Adaptado de Godino et al. (2012)

Tarefa 3: Utilizando a calculadora gráfica representa graficamente funções reais de variável real da família $f(x) = mx + b$, com m e b reais. Estuda as representações gráficas de funções desta família e indica:

- A existência e o número de zeros;
- Intervalos de monotonia;

Adaptado de Saraiva, Teixeira e Andrade (2010)

Tarefa 4: Considera equação de segundo grau definida por $ax^2 + bx + c = 0$. Mostra que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ é a expressão que nos dá as raízes dessa equação, qualquer que seja $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$, com $b^2 - 4ac \geq 0$.

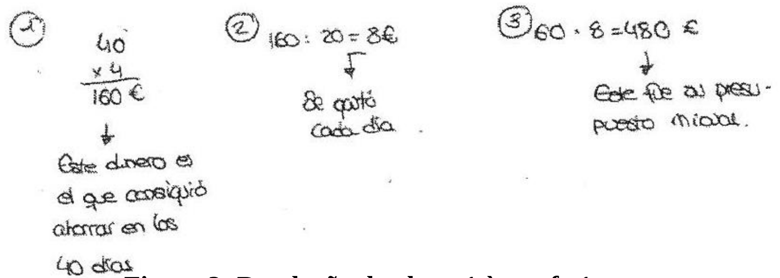
Adaptado de Godino et al. (2014)

Tarefa 5: Prova que é válida a propriedade associativa entre vetores, ou seja:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Adaptado de Oliveira (2011)

Tabela 1: **Níveis de pensamento algébrico identificados por Godino et al. (2012, 2014, 2015)**

Nível	**Descrição e exemplo de resposta**
0	*Descrição:* São as respostas que não incluem características algébricas. Nelas, intervêm os objetos extensivos que são expressos através de uma linguagem natural, numérica, que recorra a imagens ou gestos. Podem aparecer símbolos que representam o desconhecido, mas esse valor obtém-se efetuando operações em objetos particulares. Em tarefas recursivas, a relação de dois termos consecutivos não implica a determinação de uma regra. *Exemplo:*  **Figura 2: Resolução do aluno 1 à tarefa 1**

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>

<u>*Descrição:*</u> Usa-se a igualdade como equivalência de expressões, intervêm os objetos intensivos cuja generalidade aparece de uma forma explícita perante uma linguagem natural, numérica, simbólica, que recorra a imagens ou gestos. Podem aparecer símbolos que se referem a objetos intensivos, mas não há operações com eles. Em tarefas estruturais, podem ser aplicadas relações e propriedades de operações, dados desconhecidos expressados com símbolos também podem aparecer. Em tarefas funcionais, os alunos recorrem ao cálculo com objetos extensivos.

<u>*Exemplo:*</u>

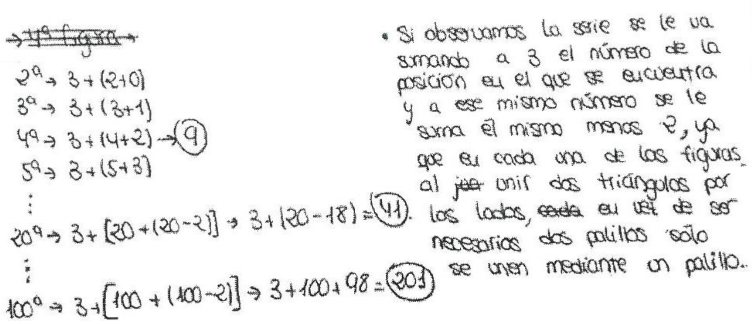


Figura 3: Resolução do aluno 2 à tarefa 2

</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>

<u>*Descrição:*</u> Interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal que mencionam os objetos intensivos reconhecidos, no entanto, esses objetos, estão relacionados com a informação do contexto espacial ou temporal.

Citando Godino et al. (2012) "*En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma* $Ax \pm B = C$. *En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión*" (p. 290).

<u>*Exemplo:*</u>

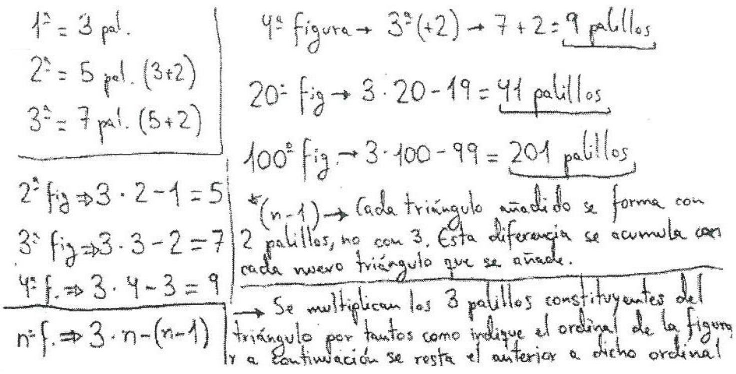
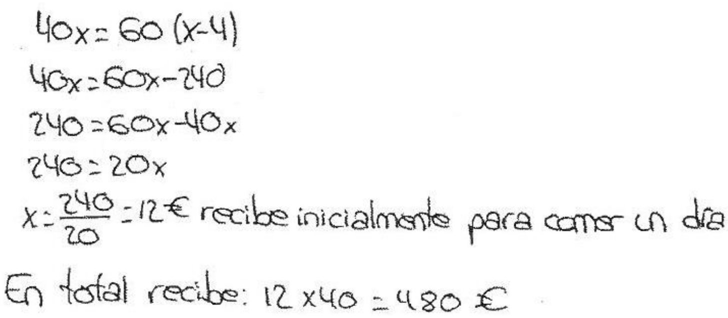


Figura 4: Resolução do aluno 3 à tarefa 2

</td>
</tr>
</table>

3	*Descrição:* Formam-se objetos intensivos que são apresentados de maneira simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles. As expressões sofrem transformações na forma simbólica, mantendo sempre a equivalência. Resolvem-se equações do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$. Tratam-se variáveis e incógnitas aplicando propriedades estruturais, como por exemplo a substituição. *Exemplo:*  **Figura 5: Resolução do aluno 4 à tarefa 1**
4	*Descrição:* Os alunos usam parâmetros para expressar equações e famílias de funções. Nota-se que é feita uma distinção entre parâmetros e coeficientes de variáveis, uma vez que são apontes domínios diferentes. *Solução esperada da tarefa 3:* Se $m = 0$ então $f(x) = b$ é estritamente monótona. Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \mathbb{R}$ Caso $b \neq 0$: Zeros: $x \in \{\emptyset\}$ Se $m > 0$ então $f(x) = mx + b$ é estritamente crescente. Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \{0\}$ Caso $b > 0$: Zeros: $x \in]-\infty, 0[$ Caso $b < 0$: Zeros: $x \in]0, +\infty[$ Se $m < 0$ então $f(x) = mx + b$ é estritamente decrescente. Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \{0\}$ Caso $b > 0$: Zeros: $x \in]0, +\infty[$ Caso $b < 0$: Zeros: $x \in]-\infty, 0[$

5	*<u>Descrição:</u>* Faz-se um tratamento de parâmetros de modo analítico, ou seja os alunos trabalham, analiticamente, com um ou mais parâmetros. *<u>Solução esperada da tarefa 4:</u>* $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$ $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad c.q.d$
6	*<u>Descrição:</u>* O trabalho com certas estruturas algébricas (tais como vetores espaciais ou grupos) e o estudo de adição, subtração, divisão, multiplicação e composição de funções indicia a presença do nível 6. Há um jogo entre objetos algébricos e processos. *<u>Solução esperada da tarefa 5:</u>* Seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = \overrightarrow{BC},\ \vec{w} = \overrightarrow{CD}$. Então, pela definição de soma vetorial: $\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$ Logo, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \qquad c.q.d$

No entanto, nem todos os autores analisam o pensamento algébrico dos alunos de acordo com os níveis propostos por Godino et al. (2012, 2014, 2015). Ruiz-Munzón et al. (2011) propõem que se faça uma análise por etapas, tal como irei apresentar no tópico seguinte (2.1.4 – *Etapas dos processos algébricos*).

2.1.4. Etapas dos processos algébricos

Ruiz-Munzón et al. (2011) definem sistema (S) como a Organização Matemática (OM) que engloba os problemas aritméticos que se resolvem mediante a execução de um PCA na forma retórica e do padrão de análise-síntese. Para além desses, S envolve também as interpretações dos resultados desses problemas. Os autores subdividem os processos algébricos em três etapas (M_1, M_2 e M_3).

Na primeira etapa do processo algébrico (M_1 – ampliação de S) é preciso considerar o PCA como um só (traduzindo-o por uma formulação escrita e simbólica), ter em conta os elementos tecnológicos (hierarquia das operações, o uso adequado de parênteses e as propriedades destas relações) e as técnicas de simplificação de expressões algébricas. Os dados dos problemas e as incógnitas não são valores numéricos (são relações), não sendo assim possível uma resolução aritmética. Esta etapa corresponde a uma atividade Matemática de nível 3 no modelo proposto por Godino et al. (2012, 2014, 2015).

Ruiz-Munzón et al. (2011) consideram ainda a OM M_1' (sub-etapa de M_1) que constrói a equação utilizando apenas técnicas de simplificação. Um exemplo onde esta é aplicada é na resolução de equações que têm a incógnita num só membro.

As resoluções que se encontram na segunda etapa do processo algébrico (M_2 – ampliação de M_1) são as que têm a necessidade de igualar os PCA que contêm os mesmos argumentos não numéricos. Assim sendo, há também a necessidade de manipular as igualdades, usando técnicas de simplificação. Esta etapa, além de completar M_1, aumenta o nível algébrico exigido aos alunos (Ruiz-Munzón et al., 2011).

Ruiz-Munzón et al. (2011) consideram ainda a OM M_2' (sub-etapa de M_2) que abrange os exercícios que se resolvem perante equações com uma incógnita, ou seja, esta etapa obtém-se dando valores a uma das incógnitas de M_2.

A terceira etapa do processo algébrico (M_3 – ampliação de M_2) exige uma generalização do cálculo equacional, uma vez que o número de variáveis não é limitado e não há qualquer distinção entre as incógnitas e os parâmetros. Nesta etapa, pretende-se que os problemas usem fórmulas algébricas e que os alunos consigam interpretar o que acontece quando se alteram os parâmetros dessas fórmulas (Ruiz-Munzón et al., 2011).

Ruiz-Munzón et al. (2011) refere ainda que uma modificação dos dados no enunciado pode afetar a resolução do aluno, de tal modo que a tarefa se possa situar noutra etapa do processo algébrico.

A modelação algébrico-funcional é também um tema tratado por Ruiz-Munzón et al. (2011), sendo que autor divide-a em três níveis.

Assim sendo, o primeiro nível de modelação algébrico-funcional de um sistema ($OM_{f(x)}$) corresponde aos problemas que requerem o uso de funções com uma única variável e equações e inequações que lhe são associadas. As questões que estão neste nível podem surgir de tarefas de M_2, no entanto, não se conseguem resolver totalmente nem em M_2 nem em M_3, uma vez que requerem o uso de técnicas gráficas e/ou funcionais que se situam nesta nova ampliação de M_2. Estas técnicas podem passar pela derivação de funções e a visualização gráfica de uma função (Ruiz-Munzón et al., 2011).

Já o segundo nível de modelação algébrico-funcional de um sistema ($OM_{f_{p(x)}}$) é a OM que amplia $OM_{f(x)}$. Este nível engloba os problemas que exigem o uso de famílias de funções de uma variável e as equações e inequações paramétricas que lhe estão associadas. Faz-se também a distinção entre parâmetros e variáveis (Ruiz-Munzón et al., 2011).

Quanto ao terceiro nível de modelação algébrico-funcional de um sistema ($OM_{f(x_1,\dots,x_n)}$) é a OM que amplia $OM_{f_{p(x)}}$. Aqui estão incluídas as tarefas que exigem o uso de famílias de funções de duas ou mais variáveis e os instrumentos algébricos que lhes estão associados, como a derivação de funções. Muitos dos problemas que se situam neste nível podem expressar-se por um PCA semelhante aos problemas de M_3, ou seja, PCA ($x_1, \dots, x_m, a_1, \dots a_n$) = 0, no entanto $OM_{f(x_1,\dots,x_n)}$ completa M_3 porque este nível de modelação inclui o trabalho com funções algébricas e não algébricas (com mais do que uma variável) e contém tarefas, técnicas e elementos tecnológico-teóricos que não são usados em M_3 (Ruiz-Munzón et al., 2011).

2.2. Facetas e níveis de análise de processos de ensino em aprendizagem da Matemática

O Enfoque Ontosemiótico é um marco teórico da Didática da Matemática que pretende relacionar diferentes perspetivas sobre o conhecimento Matemático, o seu ensino e a sua aprendizagem (Godino, 2009).

Godino, Batanero e Font (2008) explicam o processo decorrido entre o propósito de relacionar estas perspetivas até chegarem ao Enfoque Ontosemiótico que, segundo estes autores, é "um modelo unificado da cognição e instrução matemática" (p.11).

Neste enfoque, estão incluídos vários modelos que pretendem adotar um ponto de vista global das diferentes perspetivas, tendo em consideração as dimensões e interações entre elas (Godino, 2009). Assim, o autor considera: (i) "[u]m modelo epistemológico sobre as matemáticas baseado em pressupostos antropológicos/socioculturais" (p. 20); (ii) "[u]m modelo de cognição matemática sobre bases semióticas" (p. 20); (iii) "[u]m modelo instrucional sobre bases sócioconstrutivistas" (p. 20); (iv) "[u]m modelo sistémico-ecológico que relaciona as dimensões anteriores entre si com o fundo biológico, material e sociocultural, em que tem lugar a atividade de estudo e comunicação matemática" (p. 20).

Segundo Godino et al. (2008), numa primeira fase de estudo, consideraram apenas a análise epistémica e cognitiva. No entanto, verificaram que "os processos comunicativos que têm lugar na educação matemática requerem interpretar tanto as entidades conceituais como as situações problemáticas e os próprios meios expressivos e argumentativos que desencadeiam processos interpretativos" (p.10). Deste modo, concluíram que se deve fazer uma abordagem mais profunda às relações que se estabelecem entre o pensamento, a linguagem matemática e as situações-problema.

O modelo apresentado na Figura 6 reúne várias facetas de análise do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, agrupadas em níveis de análise, tendo em conta o "tipo de informação necessária para tomar decisões fundamentadas sobre a instrução" (Godino, 2009, p.20).

Figura 6: Facetas e níveis de análise didática
(Godino, 2009, p. 21)

As facetas apresentadas no modelo são:

1. "Epistémica: Conhecimentos matemáticos relativos ao contexto institucional em que se realiza o processo de estudo e a distribuição no tempo dos diversos componentes do conteúdo (problemas, linguagens, procedimentos, definições, propriedades, argumentos);
2. Cognitiva: Conhecimentos pessoais dos alunos e progressão das aprendizagens;
3. Afetiva: Estados afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores) de cada aluno em relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido;
4. Mediacional: Recursos tecnológicos e atribuição do tempo às diferentes ações e processos;
5. Interacional: Padrões de interação entre o professor e os alunos e a sua sequenciação orientada para a fixação e negociação dos significados;
6. Ecológica: Sistema de relações com o ambiente social, político, económico, … que suporta e condiciona o processo de estudo"

(Godino, 2009, p.21).

Este modelo considera essenciais a faceta epistémica e a cognitiva. No entanto, reconhece que as restantes facetas condicionam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Os vários níveis de análise que Godino (2009) considera são:

1. "Práticas matemáticas e didáticas. Descrição das ações realizadas para resolver as tarefas matemáticas propostas para contextualizar os conteúdos e promover a aprendizagem. Também se descrevem as linhas gerais de atuação do docente e discentes.
2. Configurações de objetos e processos (matemáticos e didáticos). Descrição de objetos e processos matemáticos que intervêm na realização das práticas, assim como os que emergem delas. A finalidade deste nível é descrever a complexidade de objetos e significados das práticas matemáticas e didáticas como fator explicativo dos conflitos na sua realização e da progressão na aprendizagem.
3. Normas e metanormas. Identificação do conjunto de regras, hábitos, normas que condicionam um processo de estudo e afetam cada faceta e as suas interações.
4. Adequação. Identificação de potenciais melhorias do processo de estudo que aumentem a adequação didática"

(pp. 21 – 22).

2.3. Tipos de erros no processo de aprendizagem da Álgebra

O erro é quase sempre visto como um fracasso, no entanto, será que o podemos tratar assim? Não será o erro uma oportunidade de aprendizagem? Vale (2010) menciona que Demóstenes, filósofo grego da Antiguidade, defendia que o erro não era "um caminho para o fracasso ou para o desespero, mas antes uma razão para a esperança" (p.33), para além deste filósofo, o autor menciona que outros apoiavam este argumento, como é o caso de Bacon e Karl Popper.

Socas (2011) menciona que "[a]s dificuldades e os erros na aprendizagem da Matemática têm sido e são um foco de estudo e investigação em Educação Matemática" (p.10).

O interesse na análise dos erros levou o psicólogo Thorndike, no início do século XX, a descrever pormenorizadamente os tipos de tarefas que os docentes deviam propor aos seus alunos (Vale, 2010).

Com o passar dos anos, o erro passou a deixar o cognome "fracasso", passando a ser visto como um elemento que pode ajudar na construção do conhecimento, sendo que para isso terá de ser acompanhado por uma reflexão sobre a sua ocorrência (Vale, 2010).

Há vários tipos de erros em Educação Matemática e também diversas formas de os classificar e analisar. Vejamos as categorias de alguns autores:

Segundo Vale (2010), Radatz (1979) apresenta 5 categorias para classificar os erros que os alunos cometem em Matemática, assim ele refere que os erros podem ser cometidos: (i) por dificuldades de linguagem; (ii) por dificuldades em obter informações espaciais; (iii) pela fragilidade no domínio de pré-requisitos, habilidades, factos e conceitos; (iv) por associações incorretas ou rigidez do pensamento; (v) na aplicação de regras e estratégias irrelevantes.

Uma outra classificação apresentada por Vale (2010) é a de Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar (1987). Esta é definida por 6 categorias e foca-se na manifestação operacional do erro e não na sua causa: (i) utilização indevida dos dados; (ii) interpretação da linguagem incorreta; (iii) inferência lógica inválida; (iv) uso não adequado de um teorema ou definição; (v) solução que não responde à tarefa proposta; (vi) erros de carácter técnico.

Segundo a mesma autora, Hall (2002) organiza os erros em Álgebra da seguinte maneira: (i) erros por eliminação – há uma generalização excessiva de algumas operações Matemáticas, por exemplo $21x - 3 = 18x$; (ii) erros por troca de membros – por exemplo, $x + 18 = 12 \Leftrightarrow x = 18 + 12$; (iii) erros por redistribuição – os alunos ao manipularem a expressão, adicionam uma quantidade num dos membros da expressão e retiram essa mesma quantidade no outro membro da expressão, por exemplo $x + 5 = 23 \Leftrightarrow x + 5 - 5 = 23 + 5$; (iv) erros por transposição – Os alunos estão a operar segundo a regra "muda de lado, muda de sinal" por exemplo, quando os alunos cometem o seguinte erro $x + \frac{3}{7} = 2 \Leftrightarrow x + 3 = 14$, eles estão a generalizar uma regra que resulta em equações simples, como por exemplo $\frac{x}{7} = 2 \Leftrightarrow x = 14$. Para além destas categorias, Vale (2010) menciona que Hall (2002) considera ainda os *erros de exaustão* e a *ausência de estrutura*. Os primeiros ocorrem mais frequentemente no final de uma resolução do que no início da mesma, embora haja oportunidade para os cometer inicialmente, por exemplo:

$$\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x-5} = \frac{(x+2)(x+5)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+2}{x-1} = \frac{2}{-1}.$$

Nesta resolução, o aluno podia ter simplificado o x^2 tal como fez na penúltima expressão. Os segundos são "um erro em que se verifica uma confusão estrutural, quer no uso de um sinal de igual, quer na aplicação de algoritmos" (Vale, 2010, p.40), por exemplo:

$$2x + x + 7 = 4x + 16 \Leftrightarrow 4 + 7 = 4x - 6$$

Segundo Vale (2010), MacGregor (1996) defende que o fraco conhecimento e domínio da Aritmética é uma possível causa para que os alunos cometam erros no trabalho com a Álgebra, uma vez que se os alunos não compreenderam relações ou conceitos, não irão utilizar a linguagem algébrica corretamente. Segundo a mesma autora, Hall (2002) menciona que alguns erros cometidos por alunos mostram que a distinção entre equações e expressões não é bem clara para eles. Por exemplo, a expressão $x^2 + 4x + 3$ é muitas vezes interpretada como uma equação, levando o aluno a escrever:

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

Socas (2011) menciona que as dificuldades que os alunos sentem estão organizadas em cinco categorias: (i) Complexidade dos objetos Matemáticos; (ii) Processos de pensamento Matemático; (iii) Processos de Ensino desenvolvidos para a aprendizagem Matemática; (iv) Processos de desenvolvimento cognitivo dos alunos; (v) Atitudes afetivas e emocionais face à Matemática;

Para Socas (1997), segundo Vale (2010), os erros podem ter diferentes origens, no entanto todos os erros são a presença de um processo cognitivo inadequado. Assim, o autor menciona que as causas dos erros podem advir: (i) da dificuldade dos objetos matemáticos; (ii) dos procedimentos de pensamento matemático; (iii) dos procedimentos de ensino desenvolvidos; (iv) dos procedimentos do desenvolvimento cognitivo dos estudantes; (v) das atitudes afetivas que o aluno apresenta face à Matemática;

Vale (2010) faz referência ao modelo teórico de Socas (1997) em que se consideram três eixos que permitem avaliar a origem do erro aquando da aprendizagem da Álgebra: (i) obstáculos; (ii) ausência de sentido; (iii) atitudes afetivas e emocionais. A Figura 7 é um esquema deste modelo teórico.

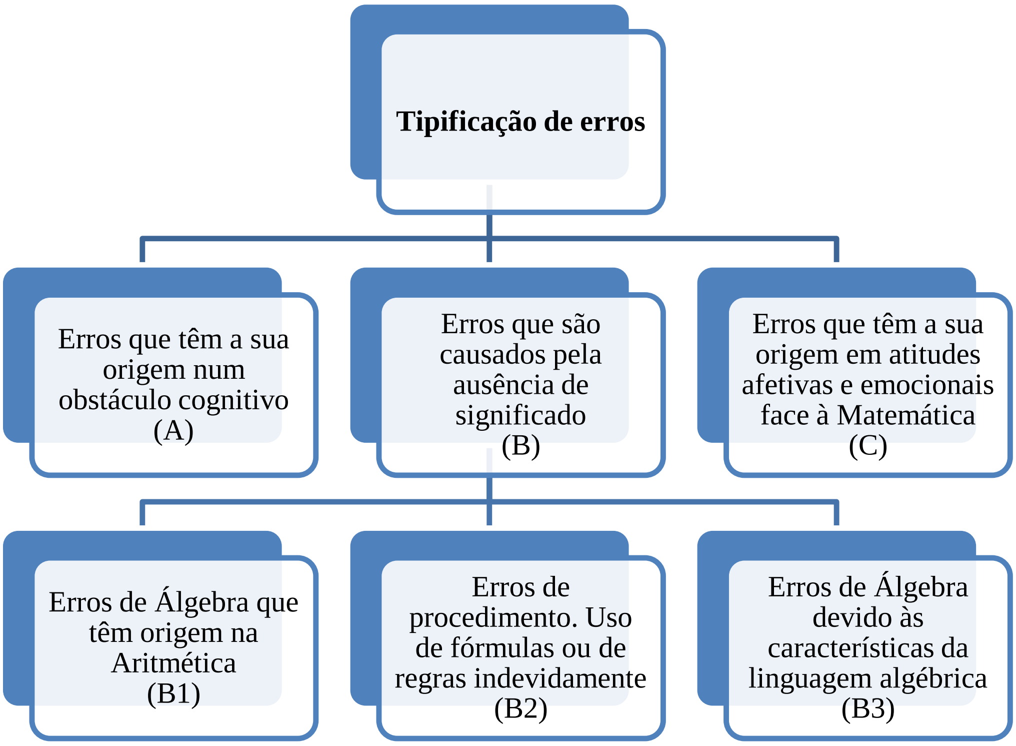


Figura 7: Esquema de tipificação de erros de Socas, (Vale, 2010, p.43)

Categoria A – Quando um aluno utiliza o conhecimento fora do contexto, pode provocar respostas incorretas. É este tipo de erro que é considerado nesta categoria.

Categoria B – Os erros cuja origem está na ausência de sentido encontram-se nesta categoria. Esta subdivide-se em 3 subcategorias:

Subcategoria B1 – Quando o aluno comete erros de natureza aritmética, está a cometer erros da subcategoria B1. A título de exemplo considera-se o uso inadequado de parêntesis, erros de divisão, entre outros.

Subcategoria B2 – Considera os erros com origem na utilização indevida de fórmulas ou procedimentos, como por exemplo a aplicação incorreta da propriedade distributiva.

Subcategoria B3 – Nesta subcategoria estão presentes os erros cuja origem está na linguagem algébrica, como por exemplo a substituição formal de variáveis e a incompreensão do sinal de igual na Álgebra.

Categoria C – Os erros que tiveram origem em atitudes afetivas ou emocionais, como por exemplo a falta de concentração, o excesso de confiança, entre outros.

Socas (2011) menciona que este modelo permite "aprofundar as dificuldades e obstáculos que têm os alunos na aprendizagem da linguagem algébrica e possibilita novas maneiras de focar o estudo dos erros" (p. 28).

Para este estudo irão ser tidas em conta o modelo teórico apresentado na Figura 7.

2.4. Tecnologia na sala de aula

Os jovens da nossa sociedade estão cada vez mais tecnológicos, usam facilmente novos modelos de telemóveis, computadores ou *tabletes*. Carreira (2009) salienta que esta geração distingue-se das anteriores pelo grande à vontade que tem em trabalhar com novas tecnologias digitais e pela frequência com que as usam. Torna-se assim desafiante educar (e preparar para o mercado de trabalho) estes jovens, uma vez que são "os imigrantes digitais a ensinar os nativos digitais, na escola de hoje" (Carreira, 2009, p.56).

Segundo Amado e Carreira (2008), Santos (2000) menciona que muitos professores vêm o facto de não conseguirem responder ao aluno de imediato, ou não saberem todas as funcionalidades de uma ferramenta, um sinal de inferioridade. O uso de novas tecnologias em sala de aula, gera frequentemente situações que não tinham sido planeadas, deste modo, a aula não é conduzida apenas pelo professor, mas também pelo computador e pelos alunos, assim sendo, terá que haver um trabalho maior por pare do docente na preparação de aulas, para evitar situações de improviso.

Estudos vieram confirmar que o ritmo de desenvolvimento profissional docente não acompanha o desenvolvimento tecnológico, podendo este facto justificar a pouca adesão à tecnologia em sala de aula (Duarte, 2011). O mesmo autor refere que as razões que justificam esta falta de uso de tecnologia nas práticas docentes "passam pela necessidade de repensar os motivos curriculares e os contextos adequados à sua integração, assim como a falta de reflexão sobre o seu papel no ensino da Matemática, em contextos de desenvolvimento profissional" (p. 154). Para contornar estas dificuldades, Amado e Carreira (2008) salientam uma solução que é apresentada por Santos (2000) e Almiro (2005), estes dois autores reconhecem que seria importante os docentes serem apoiados por outros colegas nas aulas que se usasse tecnologia, para minimizarem os erros que pudessem surgir e apoiar os alunos nos seus raciocínios.

Apesar das possíveis dificuldades que o docente pode encontrar em relação ao uso de tecnologia em ambiente de sala de aula, é importante não destruir ligações entre o mundo não escolar do aluno e o mundo escolar (Carreira, 2009). O professor deve estar, por isso, recetivo a mudanças nas suas práticas.

De facto, usar tecnologia nas aulas de Matemática apenas traz vantagens para o aluno. Se usada corretamente permite uma melhor visualização das tarefas propostas, diminuindo assim a necessidade de abstração e descomplicando ideias, tornando-as mais percetíveis (Amado & Carreira, 2008). A folha de cálculo, por exemplo, é uma ferramenta cognitiva de visualização e modelação que pode ser utilizada em várias áreas do currículo. No domínio da Álgebra, é um recurso essencial que ajuda os educandos a criarem ligações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos. As *applets* são aplicações bastante interativas orientadas para áreas particulares do currículo, com a ajuda delas, os alunos podem mais facilmente conseguir demonstrar, explorar e visualizar (Duarte, 2011).

A visualização Matemática é importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Amado e Carreira (2008) referem que a sua inclusão no processo ensino/aprendizagem promove a intuição Matemática dos alunos. Assim sendo, o recurso a ferramentas tecnológicas, incentiva novas formas de pensamento, evitando tarefas rotineiras e promovendo o pensamento algébrico (Nogueira, 2010).

Atualmente, em Portugal, o uso de calculadora gráfica é obrigatório para o Ensino Secundário e o uso do computador é nitidamente aconselhável, pois a utilização de tecnologia para resolver problemas permite alterar a forma como são resolvidos, compreendidos e/ou formulados (Ministério da Educação, 2002). Ponte (2003) concorda com esta perspetiva, já que ele refere que "as tecnologias têm hoje um papel fundamental na sociedade e a tarefa dos educadores é tirar delas o melhor partido, conservando, como em relação a tudo, o sentido crítico" (p. 4). No mesmo sentido, Carreira (2009) salienta que Borba e Villareal (2006) referem que a Matemática produzida por pessoas que usem apenas lápis e papel será diferente daquela que é produzida por pessoas que recorram a computadores.

Uma outra grande vantagem do uso da tecnologia em sala de aula é que os cálculos são mais rapidamente efetuados, deste modo, os alunos ficam com mais tempo para explorar uma maior variedade de tarefas, melhorando e alargando as suas aprendizagens (Amado & Carreira, 2008). Hoyles e Noss (2003), mencionados por Amado e Carreira (2008), salientam que ao aliviar os alunos de encargos mais rotineiros, dá-se-lhes a oportunidade de investirem em conhecimentos e capacidades de nível mais elevado, tal como a interpretação de gráficos, a formulação de conjeturas, a capacidade de relacionar conceitos e analisar de forma crítica os resultados.

Duarte (2011) salienta que a introdução de computadores na sala de aula permitiu que fossem feitos mais trabalhos de grupo e aumentou a motivação dos jovens, para além disso, originou uma maior diversidade de estratégias adotadas pelos docentes. No entanto, quando a utilização de computadores com toda a turma se torna complicada, os professores podem optar pelo uso de quadros interativos, uma vez que as suas características visuais e dinâmicas promovem o uso de diferentes práticas. Amado e Carreira (2008) vão de encontro a esta perspetiva, uma vez que referem que, quando os professores recorrem à tecnologia, os alunos têm ao seu dispor uma maior variedade de exemplos e contraexemplos, num espaço de tempo mais curto, são incentivados a conjeturar e observar e podem trabalhar com mais do que uma representação, havendo assim uma redução do medo de cometer erros. Para além disso, os alunos podem visualizar diversas formas de representar uma função, podendo até estabelecer conexões entre as diferentes representações, o que provavelmente terá consequências no desenvolvimento do seu raciocínio (Nogueira, 2010).

A mesma autora menciona que Fontes, Fontes e Fontes (2009) referem que um software como o *GeoGebra* permite ao docente interligar temas diferentes, como a Álgebra e a Geometria e através da sua característica dinâmica, permite ao aluno apresentar resoluções de tarefas alternativas.

O uso de tecnologia em aulas de Matemática promove atividades de índole exploratória e investigativa. A Álgebra não fica confinada à manipulação de símbolos, o estudo de parâmetros, por exemplo, é também mais intuitivo com recurso a tecnologias (NCTM, 2007). Nogueira (2010) defende que se o aluno mantiver contacto com tecnologias em sala de aula, irá conseguir desenvolver a sua capacidade de resolver problemas, aumentar a sua autonomia, o pensamento crítico e desenvolver uma atitude positiva em relação à Matemática. No entanto, é importante não substituir as tecnologias pelo lápis e papel, mas sim serem um complemento um do outro (Ministério da Educação, 2002). Duarte (2011) acrescenta ainda que as práticas de ensino devem ser conduzidas pelo professor, sendo ele também o responsável por discussões com a turma, de modo a que os estudantes façam emergir os conceitos.

Assim sendo, é o professor que é determinante no ambiente de trabalho dos alunos, sendo as tarefas de investigação e de resolução de problemas que são mais propícias ao uso e exploração das potencialidades da tecnologia, promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (Duarte, 2011). Ou seja, é importante um professor saber selecionar as tecnologias mais adequadas às suas aulas de modo a que os alunos consigam aprender, assim, um professor deve estar preparado para aprender a trabalhar com novos recursos, uma vez que poderão ser uma mais-valia no processo ensino/aprendizagem das suas aulas (Amado & Carreira, 2008).

Todos os estudos parecem concluir que o uso de tecnologia em sala de aula promove a aprendizagem dos educandos, sendo essencial na exploração das tarefas.

3. Metodologia de Investigação

Neste capítulo, é apresentada a metodologia adotada para a realização deste estudo. São caracterizados os participantes da investigação, identificam-se as fases de estudo, apresentam-se os instrumentos de recolha de dados e os processos de análise de dados.

Esta investigação consistiu na análise de 285 respostas, sendo que 208 são do teste de avaliação de conhecimentos e 77 da ficha de trabalho implementada. Note-se que as respostas de natureza não algébrica não foram consideradas para este estudo, e por isso não foram analisadas.

3.1. Opções metodológicas

Este estudo pretende analisar os principais erros que os alunos cometem ao realizar tarefas de índole algébrica, bem como o nível de pensamento algébrico de alunos que frequentam o 10.º ano de escolaridade. Para atingir esta finalidade, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa, que segundo Creswell (2007) "emprega diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados" (p. 184).

Bogdan e Biklen (1994) enunciam cinco características desta natureza de investigação: (i) os dados são recolhidos num ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal; (ii) é descritiva; (iii) o pesquisador qualitativo interessa-se mais pelo processo do que os resultados ou produtos; (iv) o pesquisador qualitativo tem tendência a analisar os seus dados de forma indutiva; (v) dá-se muita importância ao significado.

Assim, estas características são ajustadas ao estudo, uma vez que a fonte direta dos dados é uma turma do 10.º ano e os dados recolhidos correspondem às suas produções escritas num teste de avaliação de conhecimentos do 2.º período e de uma ficha de trabalho realizada em tempo de aula. A investigadora é o principal instrumento de recolha de dados, pois as informações recolhidas em ambiente sala de aula permitiram identificar dúvidas que os alunos iam tendo bem como as suas formas de pensar algebricamente.

Para além disso, como os dados recolhidos são produções escritas dos alunos, então a sua forma de apresentação será descritiva, sendo também mostrados exemplos de algumas respostas dos alunos.

Neste estudo, pretende-se compreender quais as principais dificuldades dos alunos ao resolver tarefas de índole algébrica, bem como identificar os níveis de pensamento algébrico de alunos do 10.º ano. Deste modo, não interessa apenas saber se o aluno acertou ou errou a tarefa, mas sim as suas produções escritas e os erros que eles cometeram.

Os dados foram recolhidos com a intenção de dar a conhecer os erros que os alunos que iniciam o Ensino Secundário mais cometem, assim como a sua forma de pensar em tarefas algébricas.

Este estudo insere-se ainda na modalidade estudo de caso exploratório. Meirinhos e Osório (2010), referenciando diversos autores, como Yin (1993; 2005), Stake (1999) e Rodriguez, Flores e Jiménez (1999) mencionam que "um caso pode ser algo bem definido ou concreto, como um indivíduo, um grupo ou uma organização, mas também pode ser algo menos definido ou definido num plano mais abstrato como, decisões, programas, processos de implementação ou mudanças organizacionais" (p.52).

Para Meirinhos e Osório (2010) o estudo de caso tem características semelhantes às da investigação qualitativa. Assim, o estudo de caso pretende recolher, analisar e interpretar a informação dos métodos qualitativos, no entanto acresce o facto de a investigação ser um estudo intensivo de um ou poucos casos. No entanto, não quer isto dizer que não se possam realizar estudos de caso em investigações quantitativas.

Um estudo de caso é, segundo Yin (2001), uma investigação empírica e pretende "investigar um fenómeno contemporâneo dentro do seu contexto da vida real" (p.32), tendo especial interesse se "os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos" (p.32).

Por outro lado, Yin (2001) refere que a investigação de estudo de caso "enfrenta uma situação tecnicamente única […] [e por isso] baseia-se em várias fontes de evidências, com os dados precisando convergir em formato de triângulo […] [havendo um] desenvolvimento prévio de proposições teóricas" (pp. 32-33) que nos conduzem à recolha e análise de dados.

Este trabalho insere-se assim nesta modalidade, pois o caso em estudo é uma turma do 10.º ano de escolaridade e pretende-se recolher, analisar e interpretar resoluções de tarefas produzidas pelos participantes, no que se refere ao nível de pensamento algébrico envolvido e aos erros cometidos. Para além disso, a recolha e análise de dados basearam-se em estudos teóricos preexistentes.

3.2. Participantes

Os participantes do estudo são 25 alunos do 10.º ano de uma escola de Aveiro. Atualmente a escola abrange o 3.º Ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário e oferece os cursos científico-humanísticos, profissionais em regime diurno e educação e formação de adultos em regime noturno.

A turma em questão frequenta o curso de Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Atualmente é constituída por 27 alunos, dos quais apenas 25 frequentam a disciplina de Matemática, sendo apenas esses os participantes do estudo. Desses 25 alunos, 17 são do sexo feminino e 8 do sexo masculino. A 12 de dezembro de 2014, a média das suas idades era de 14,6 anos.

A informação relativa às habilitações literárias dos pais dos alunos é escassa e quanto às suas profissões apenas são referidas as de 6 pais e 24 mães. Assim sendo, pode-se aferir que 6 estão na área de ensino, 4 na área da saúde, 4 estão ligados à direção/gestão e economia, 4 trabalham na área da receção, 2 fazem investigações, 2 fabricam materiais, 1 trabalha na área da engenharia, 1 na área do *design*, 1 na área de direito, 1 é arquiteto, 1 faz limpezas e 1 é operador de instalação.

O papel de encarregado de educação é assumido, maioritariamente, pelas mães. No entanto, há também 2 pais e 1 primo que acarretam essa mesma responsabilidade.

Quanto às classificações dos alunos no ano letivo anterior, nota-se que, quanto ao exame nacional do 9.º ano, 8 alunos tiveram 3, 11 alunos tiveram 4 e 6 alunos tiveram 5. Quanto à sua avaliação final, 1 aluno terminou com 2, 6 alunos com 3, 14 alunos com 4 e 4 alunos acabaram com 5.

3.3. Fases do estudo

Este estudo teve início em setembro de 2014 e findou-se em julho de 2015 e divide-se em três fases. Numa primeira fase, realizou-se a revisão da literatura para dar suporte teórico ao estudo, assim como a introdução. Numa segunda fase, foi elaborada a ficha de trabalho a implementar e foram recolhidos os dados. A última fase diz respeito à análise dos dados recolhidos, à realização de leituras que complementam as anteriores e à conclusão da investigação. A Tabela 2 sintetiza as fases do Estudo, mostrando os meses em que se trabalhou em cada tópico.

Tabela 2: **Fases do estudo**

	Mês/Ano										
	09/ 2014	10/ 2014	11/ 2014	12/ 2014	01/ 2015	02/ 2015	03/ 2015	04/ 2015	05/ 2015	06/ 2015	07/ 2015
Escolha do tema											
Pesquisa bibliográfica											
Introdução											
Fundamentação Teórica											
Elaboração da ficha de trabalho											
Intervenção na unidade de ensino											
Recolha de dados											
Metodologia											
Análise e Discussão dos dados											
Conclusões											
Revisão do trabalho											

3.4. Instrumentos de recolha de dados

Os dados foram recolhidos através de um teste escrito de avaliação de conhecimentos, aplicado à turma no dia 10 de março de 2015, e de uma ficha de trabalho implementada no dia 8 de maio de 2015. Para a recolha das produções escritas dos alunos, foi pedida uma autorização aos respetivos Encarregados de Educação que se apresenta no anexo I.

3.4.1. Teste escrito de avaliação de conhecimentos

Após 8 aulas de 90 minutos a estudar o tema das funções quadráticas, a docente aplicou uma prova de avaliação de conhecimentos aos 25 alunos da turma. Esta será usada para estudar o pensamento algébrico dos alunos desta turma do 10.º ano.

A prova é constituída por duas partes, sendo que a primeira é elaborada por cinco tarefas de escolha múltipla com quatro alternativas de resposta, em que apenas uma é a correta. A segunda parte é constituída por quatro tarefas de desenvolvimento. Por sua vez, estas são compostas por alíneas, perfazendo um total de treze tarefas.

No entanto, para a presente investigação, serão apenas consideradas 4 tarefas de escolha múltipla e 11 tarefas de desenvolvimento, uma vez que apenas nestas os alunos usam raciocínio algébrico para as resolver. Deste modo, pretende-se estudar o nível de pensamento algébrico dos alunos nas 11 tarefas de desenvolvimento e o tipo de erros que eles mais cometeram nas mesmas.

Tarefa 1

No referencial o.n. do plano, estão representadas uma função quadrática, pela parábola de equação $y = 4x - x^2$ e uma função afim, pela reta de equação $y = \frac{1}{3}x$. Qual das condições define analiticamente o conjunto de pontos da região colorida?

(A) $y \leq \dfrac{1}{3}x \wedge y \leq 4x - x^2$ **(B)** $y \geq \dfrac{1}{3}x \wedge y \geq 4x - x^2$

(C) $y \leq \dfrac{1}{3}x \wedge y \geq 4x - x^2$ **(D)** $y \geq \dfrac{1}{3}x \wedge y \leq 4x - x^2$

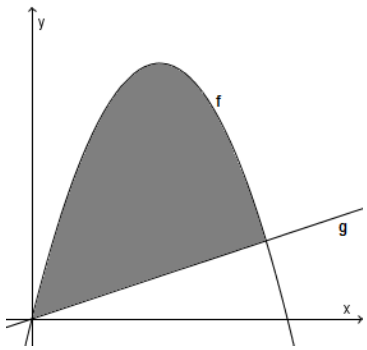


Figura 8: Representação gráfica de duas funções

Solução esperada: A região colorida está abaixo da função quadrática e acima da função linear. Portanto, conclui-se que é a resposta D.

Objetos e processos: A solução esperada requer o trabalho com condições e inequações que envolvam a função afim e a função quadrática. A linguagem das opções de resposta é simbólico-literal.

Nível de pensamento algébrico: Nível 2, uma vez que é uma tarefa de índole algébrica e funcional. Para além disso, em todas as opções de resposta, interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal que mencionam os objetos intensivos.

Tarefa 2

Um tapete retangular é colocado numa sala cujo chão tem 20 m^2. À volta de todo o tapete fica uma tira de chão de largura x, quando as dimensões do tapete são de 4 e 2 metros.

Qual das equações seguintes traduz este problema?

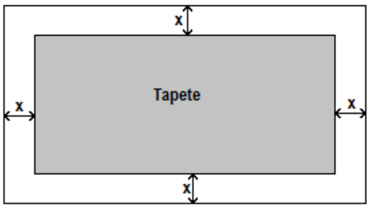


Figura 9: Tapete na sala

(**A**) $8 + 4x^2 = 20$ (**B**) $8 + 12x + 4x^2 = 20$

(**C**) $8 + x^2 = 20$ (**D**) $8 + 12x + x^2 = 20$

Solução esperada:

As dimensões do chão da sala são $(2 + 2x)$ e $(4 + 2x)$. Então a área da sala é:

$$(2 + 2x) \times (4 + 2x) = 20 \Leftrightarrow 8 + 4x + 8x + 4x^2 = 20 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 8 = 20$$

Portanto, conclui-se que a resposta correta é a opção B.

Objetos e processos: A solução requer que os alunos formulem equações do 2.º grau com uma variável, simplifiquem expressões e façam uso do sinal de equivalência. Espera-se ainda que os alunos façam uso da propriedade distributiva da multiplicação; A linguagem usada é simbólica e literal.

Nível de pensamento algébrico: Nível 2, uma vez que é uma tarefa de índole algébrica e operacional, para além disso, interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. Resolve-se também uma equação em que a incógnita está em apenas num dos membros da expressão.

Tarefa 3

Se o ponto $(2, 8)$ pertencer ao gráfico da função definida por $y = f(x + 3) + 4$, qual dos pontos, cujas coordenadas se indicam de seguida, pertence obrigatoriamente ao gráfico da função f?

(A) $(-1, 4)$ **(B)** $(-1, 12)$ **(C)** $(5, 4)$ **(D)** $(5, 12)$

Solução esperada:

Se o ponto $(2, 8)$ pertence ao gráfico da função y, então substituindo vem:

$8 = f(2 + 3) + 4 \Leftrightarrow 8 - 4 = f(5) \Leftrightarrow f(5) = 4$

Portanto, conclui-se que a resposta correta é a opção C.

Objetos e processos: Espera-se que os alunos substituam x por 2 e y por 8 e usem a propriedade associativa da adição de números inteiros.

Nível de pensamento algébrico: A solução é de nível 1 uma vez que a linguagem usada é natural, numérica e simbólica. São aplicadas propriedades de operações, e os alunos recorrem ao cálculo com objetos extensivos.

Tarefa 4

Uma função quadrática g, de domínio $\mathbb{R}$, é positiva se e só se $x \in]0, 6[$. Então, o contradomínio de g é:

(A) $]-\infty, 3]$ **(B)** $]-\infty, g(3)]$ **(C)** $[3, +\infty[$ **(D)** $[g(3), +\infty[$

Solução esperada:

A abcissa do vértice de uma parábola é o ponto médio dos seus zeros. Assim:

$$x_v = \frac{0 + 6}{2} = 3$$

Como a função é positiva entre $]0, 6[$, a concavidade da função é voltada para baixo, logo o contradomínio de $g(x)$ é $]-\infty, g(3)]$. Portanto, conclui-se que a resposta correta é a opção B.

Objetos e processos: A solução esperada pretende que os alunos trabalhem com o uso de igualdade como equivalência de expressões. Pretende-se também que os alunos identifiquem os zeros da função g, calculando de seguida a abcissa do vértice da parábola (recorrendo ao ponto médio entre os zeros). De seguida, pretende-se que os alunos identifiquem o sentido da concavidade da função g (tendo em conta que a função g é positiva entre os zeros) dando por fim a resposta.

Nível de pensamento algébrico: Nível 1, uma vez que é uma tarefa de índole algébrica e operacional, para além disso interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. Há também uma simplificação de uma expressão.

Tarefa 5

No cimo de um penhasco, um homem dispara foguetes de iluminação. A altura h, em metros, do foguete em relação ao solo, ao fim do tempo t, em segundos s, é dada por $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$

Tarefa 5.1

De que altura foi lançado o foguete?

Solução esperada:

$$h(0) = 25 + 20 \times 0 - 5 \times 0^2 = 25 + 0 - 0 = 25$$

Resposta: O foguete foi lançado a 25 metros de altura.

Objetos e processos: A solução esperada pretende que os alunos trabalhem com o uso de igualdade como equivalência de expressões. Prevê-se que os alunos trabalhem também com propriedades de operações aritméticas (elemento absorvente da multiplicação, propriedade da existência do elemento neutro da adição);

Nível de pensamento algébrico: Nível 1, uma vez que é uma tarefa de índole algébrica e operacional, para além disso a linguagem usada é natural, numérica e simbólica. São aplicadas propriedades de operações.

Tarefa 5.2

Ao fim de quanto tempo chega o foguete ao solo?

Solução esperada:

(1):

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 25 + 20t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times (-5) \times 25}}{2 \times (-5)} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 500}}{-10} \Leftrightarrow t = \frac{-20 + 30}{-10} \ \vee \ t = \frac{-20 - 30}{-10} \Leftrightarrow t = -1 \vee \ t = 5$$

Resposta: O foguete chega ao solo após 5 segundos, pois não existem tempos negativos.

(2):

$$h(5) = 25 + 20 \times 5 - 5 \times 5^2 = 0$$

Resposta: O foguete chega ao solo após 5 segundos.

Objetos e processos: Na solução (1) o aluno recorre à fórmula resolvente para determinar os zeros e, atendendo ao contexto do problema, exclui uma solução. A linguagem usada é numérica e natural. Na solução (2) o aluno recorre a uma substituição para verificar que 5 é solução da equação.

Nível de pensamento algébrico: A solução (1) é de nível 1, a linguagem usada é natural, numérica, e simbólica. É usado um símbolo para expressar o valor desconhecido (t). A solução (2) é de nível 0, pois a linguagem usada é natural, numérica e simbólica. Ambas as resoluções são de caráter numérico.

Tarefa 5.3

Qual é a altura máxima atingida?

<u>Solução Esperada:</u>

(1):

Seja $V(x_v, y_v)$ o vértice da função h.

$$x_v = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$h(2) = 25 + 20 \times 2 - 5 \times 2^2 \Leftrightarrow h(2) = 25 + 40 - 20 = 45$$

Resposta: A altura máxima atingida é de 45 metros.

(2):

$$h(t) = 25 + 20t - 5t^2 \Leftrightarrow h(t) = -5(t^2 - 4t + 2^2 - 2^2) + 25$$
$$\Leftrightarrow h(t) = -5(t-2)^2 + 45$$

$V(2, 45)$

Resposta: A altura máxima atingida é de 45 metros.

(3):

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

Então: $V\left(-\frac{20}{2\times(-5)}, -\frac{20^2 - 4\times(-5)\times 25}{4\times(-5)}\right) = V\left(2, -\frac{400+500}{-20}\right) = V(2{,}45)$

Resposta: A altura máxima atingida é de 45 metros.

(4):

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Então: $V\left(-\frac{20}{2\times(-5)}, f\left(-\frac{20}{2\times(-5)}\right)\right) = V(2, f(2))$

$f(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 25 = 45$

Resposta: A altura máxima atingida é de 45 metros.

Objetos e processos: Na solução (1), o aluno recorre ao cálculo da abcissa do vértice da função h (através do ponto médio entre os zeros) e de uma substituição. Na solução (2), o aluno tem que manipular a expressão de modo a conseguir escreve-la na forma $y = a(x-h)^2 + k$, em que h e k são, respetivamente, a abcissa e a ordenada do vértice. Na solução (3) pretende-se que os alunos usem a fórmula que lhes dá o vértice da parábola. Na solução (4) é esperado que os alunos usem parcialmente a fórmula do vértice da parábola, entendendo que um ponto de uma função tem de coordenadas $(x, f(x))$, sendo f uma função genérica. Nas soluções (1), (3) e (4) a linguagem é essencialmente numérica, na solução (2) a linguagem usada é simbólico-literal. Em todas as soluções pretende-se que os alunos trabalhem com a função quadrática.

Nível de pensamento algébrico: As soluções (1) e (3) são de nível 0 e de caráter numérico. A linguagem é natural e numérica. Aparecem símbolos que representam o desconhecido, mas esse valor obtém-se efetuando operações em objetos particulares. A solução (2) é de nível 2 e de índole algébrica e funcional. Nesta solução a linguagem é simbólica e literal, a informação está relacionada com o contexto espacial. Na solução (4) usa-se a igualdade como equivalência de expressões, a linguagem é natural, numérica e simbólica, sendo por isso de nível 1.

Tarefa 6

Na figura junta [Figura 10], está representada graficamente a função quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a parábola tem vértice (1, -1).

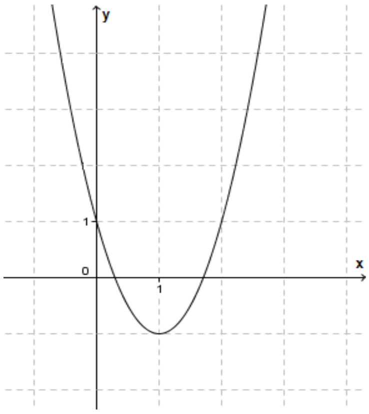


Figura 10: Representação gráfica da função f

Tarefa 6.1

Quantos zeros tem a função g, definida por $g(x) = f(x) + 1$?

Solução Esperada:

(1):

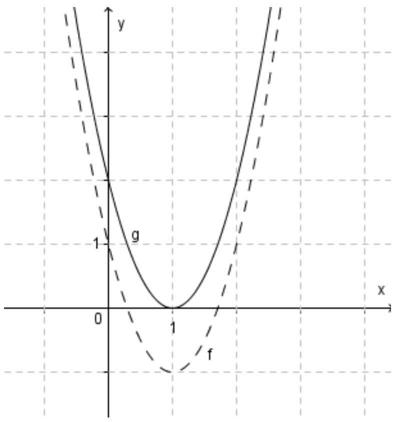


Figura 11: Representação gráfica da função g

Resposta: A função g tem um zero.

(2):

$f(x) = a(x - h)^2 + k$

Como k = -1 e h = 1, e o ponto (1, 0) pertence à função f, substituindo:

$1 = a(0-1)^2 - 1 \Leftrightarrow 1 = a - 1 \Leftrightarrow a = 2$

$f(x) = 2(x-1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

Como $g(x) = f(x) + 1$, então $g(x) = 2x^2 - 4x + 1 + 1 = 2x^2 - 4x + 2$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 0}{4} \Leftrightarrow x = 1$$

Resposta: *g(x)* tem apenas um zero.

Objetos e processos: Em ambas as soluções pretende-se que os alunos determinem o número de zeros da função *g*. Na solução (1), os alunos trabalham com as transformações de funções quadráticas. Na solução (2), os alunos subtituem os valores de h e k e através de simplificações descobrem o valor de *a*. De seguida simplificam a expressão da função *f* (função quadrática) e recorrem à fórmula resolvente para encontrar os zeros de *g*.. Nesta última solução a linguagem usada é simbólica e literal.

Nível de pensamento algébrico: A solução (1) não tem um nível de pensamento algébrico associado uma vez que a abordagem é essencialmente geométrica. A solução (2) é de nível 3 e de caráter funcional. As expressões sofrem transformações na forma simbólica, havendo conservação da equivalência. Para além disso, tratam-se de variáveis e incógnitas aplicando propriedades estruturais, como por exemplo a substituição.

Tarefa 6.2

Seja h a função definida por $h(x) = 1 - f(x)$. Qual o contradomínio de h?

Solução Esperada:

(1):

Resposta: O contradomínio da função h é $]-\infty, 2]$, pois:

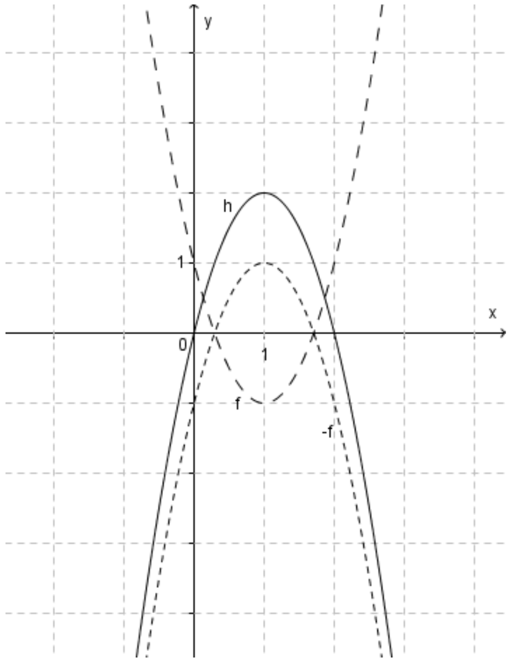


Figura 12: Representação gráfica da função h

(2):

$f(x) = a(x-h)^2 + k$

Como k = -1 e h = 1, e o ponto (1, 0) pertence à função *f*, substituindo:

$1 = a(0-1)^2 - 1 \Leftrightarrow 1 = a - 1 \Leftrightarrow a = 2$

$f(x) = 2(x-1)^2 - 1$. Como $h(x) = 1 - f(x)$, então:

$h(x) = 1 - (2(x-1)^2 - 1) = -2(x-1)^2 + 2$, então $V_h(1,2)$

Resposta: O contradomínio da função h é $]-\infty, 2]$

<u>Objetos e processos:</u> Em ambas as soluções pretende-se que os alunos determinem o contradomínio da função *h*. Na solução (1) os alunos trabalham com transformações de funções quadráticas. Na solução (2), os alunos subtituem os valores de h e k e, através de simplificações, descobrem o valor de *a*. Nesta última solução, a linguagem usada é simbólica e literal.

<u>Nível de pensamento algébrico:</u> A solução (1) não tem um nível de pensamento algébrico associado uma vez que a abordagem é essencialmente geométrica. A solução (2) é de nível 3 e de caráter funcional. As expressões sofrem transformações na forma simbólica, havendo

conservação da equivalência. Para além disso, tratam-se de variáveis e incógnitas aplicando propriedades estruturais, como por exemplo a substituição.

Tarefa 6.3

Indica os valores reais de k, de modo que a equação $f(x) = k$ seja impossível.

Solução Esperada:

Resposta: $k \in]-\infty; -1[$, pois:

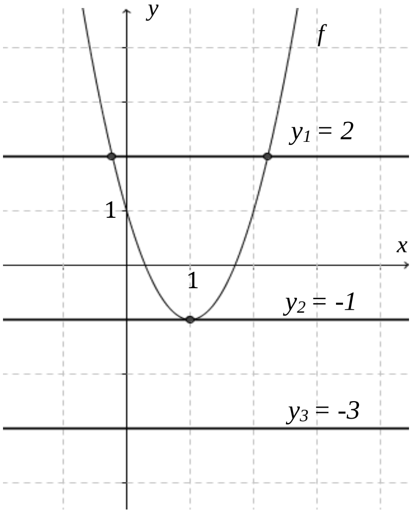


Figura 13: Representação gráfica de f(x) = k

Nota: Os alunos poderão escrever: $k < -1$.

Objetos e processos: A solução esperada pretende que os alunos trabalhem com a transformações de funções quadráticas e que descubram o valor do parâmetro *k* que torne a solução impossível.

Nível de pensamento algébrico: A solução é de nível 4, e de caráter algébrico-funcional. Os alunos estudam o parâmetro *k* de modo a que a solução seja impossível.

Tarefa 7

Na Figura 14 estão representados:

- Parte do gráfico da função f de domínio $]\,0,3[$, definida por $f(x) = 6 - 2x$.
- Um triângulo retângulo $[OPQ]$, em que O é a origem do referencial, P é um ponto do gráfico de f e Q pertence ao eixo das abcissas.

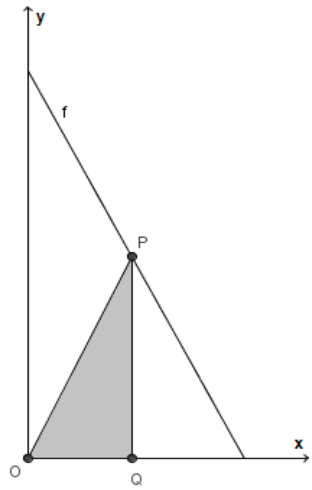


Figura 14: Representação gráfica da situação-problema

Considera que o ponto P se desloca ao longo do gráfico de f e que o ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que o triângulo $[OPQ]$ é sempre retângulo no ponto Q.

Seja A a função que faz corresponder à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$.

Por processos exclusivamente analíticos, resolve as três alíneas seguintes.

Tarefa 7.1

Mostre que, para cada $x \in \,]0,3[$, se tem $A(x) = 3x - x^2$.

<u>Solução Esperada:</u>

$O(0,0)$, $P(x, 6-2x)$, $Q(x,0)$, com $x \in \,]0,3[$ uma vez que é esse o domínio de f.

$h = \overline{PQ} = (6-2x) - 0 = 6 - 2x$, com $x \in \,]0,3[$

$b = \overline{QO} = x - 0 = x$, com $x \epsilon\ ]0, 3[$

$$A_{triângulo} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A(x) = \frac{x \times (6 - 2x)}{2} = \frac{6x - 2x^2}{2} = 3x - x^2 \quad c.q.d$$

<u>Objetos e processos:</u> Na solução esperada os alunos têm que indicar as coordenadas dos pontos O, P e Q e recorrer à propriedade da existência do elemento neutro da adição. De seguida, terão que usar à fórmula da área do triângulo, fazendo as substituições devidas. Na manipulação e simplificação da expressão, os alunos apelam à propriedade distributiva da multiplicação e ao uso da igualdade como equivalência de expressões. A linguagem usada é simbólico-literal.

<u>Nível de pensamento algébrico:</u> A solução é de nível 2, e de carácter álgebrico-operacional. Interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal, para além disso, a equação é da forma $Ax \pm B = C$.

Tarefa 7.2

Calcula as coordenadas do ponto P, de modo que a área do triângulo $[OPQ]$ seja máxima. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

<u>Solução Possível:</u>

(1):

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

A área máxima é dada quando:

$$x = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}; \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

Resposta: $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

(2):

$A(x) = 3x - x^2 = -x^2 + 3x + 0; \qquad a = -1, b = 3, c = 0$

A área máxima é dada quando:

$x = \frac{-b}{2a}$ ou seja: $x = \frac{-3}{2 \times (-1)} = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) = 3$

Resposta: $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

(3):

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 0 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times 0}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 3$$

A área máxima é dada quando:

$x = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}; \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) = 3$

Resposta: $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

(4):

$$A(x) = -x^2 + 3x = -\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, então: $P\left(\frac{3}{2}, 6 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)\right) \Leftrightarrow P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ Resposta: $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

<u>Objetos e processos:</u> Na solução (1) os alunos recorrem ao cálculo do ponto médio dos zeros para calcularem as coordenadas da abcissa do vértice. Na solução (2) os alunos aplicam uma fórmula que dá o valor da abcissa do vértice da parábola. Na solução (3) os alunos recorrem à fórmula resolvente. Na solução (4) os alunos manipulam numericamente a expressão da função A de modo a obterem as coordenadas do vértice de $A(x)$. Nas soluções (1) e (3) os

alunos têm necessidade de calcular os zeros da função *A*. Nas quatro soluções, os alunos têm que substituir o valor 1,5 por *x*, na ordenada de P. A linguagem usada é simbólico-literal e a função com que têm que trabalhar é uma parábola, no fim devem indicar as coordenadas do ponto P.

<u>Nível de pensamento algébrico:</u> Todas as soluções são de nível 2 e de carácter algébrico-operacional. Interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. Para além disso, resolve-se uma equação em que a incógnita está em apenas num dos membros da expressão (solução (1) e (3)).

Tarefa 7.3

Indica, na forma de um intervalo, o conjunto de valores de x para os quais a área do triângulo $[OPQ]$ é maior ou igual a dois.

<u>Solução Esperada:</u>

$A(x) \geq 2 \Leftrightarrow 3x - x^2 \geq 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Cálculos Auxiliares:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times (-2)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-2} \vee x = \frac{-3-1}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

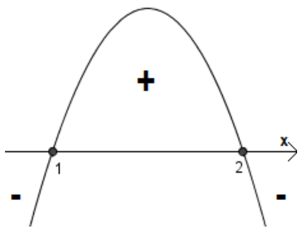


Figura 15: Zeros da função A

Resposta: $S = x \in [1, 2]$

<u>Objetos e processos:</u> Os alunos têm que resolver uma inequação do 2.º grau, sendo assim necessário calcular os zeros da parábola e recorrer à fórmula resolvente. A linguagem usada é simbólico-literal.

<u>Nível de pensamento algébrico:</u> A solução é de nível 2, e de carácter álgebrico-operacional. Interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. Para além disso,

resolve-se uma inequação em que a incógnita está em apenas num dos membros da expressão.

Tarefa 8

Numa quinta há uma estufa com a forma de uma parábola, como a representada na figura [Figura 16]. Sabe-se que a estufa tem 8 metros de largura ao nível do solo e que a altura máxima da estufa é 2,4 metros.

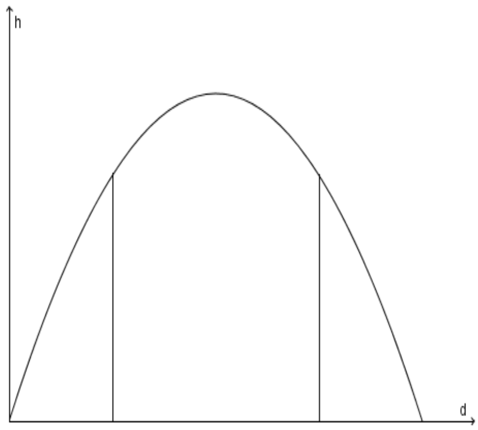


Figura 16: Representação gráfica da estufa

Tarefa 8.1

Define analiticamente a curva dada.

<u>Solução Esperada:</u>

(1):

$f(x) = a(x-h)^2 + k$, em que (h, k) são as coordenadas do vértice da parábola.

$$h = \frac{0+8}{2} = 4 \qquad k = 2{,}4$$

Como o ponto $(8, 0)$ pertence à parábola, então, substituindo vem:

$$0 = a(8-4)^2 + 2{,}4 \Leftrightarrow 0 = 16a + 2{,}4 \Leftrightarrow \frac{0-2{,}4}{16} = a \Leftrightarrow a = -0{,}15$$

$f(x) = -0{,}15 \times (x-4)^2 + 2{,}4$

(2):

$V\left(\frac{0+8}{2}; 2{,}4\right) \Leftrightarrow V(4; 2{,}4)$

Como a parábola passa na origem, então será definida por: $f(x) = ax^2 + bx$. Assim:

$\begin{cases} 2{,}4 = a \times 4^2 + 4b \\ 0 = a \times 8^2 + 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}4 = 16a + 4b \\ 0 = 64a + 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 64a = -8b \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}4 = 16a - 32a \\ b = -8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}4 = -16a \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0{,}15 \\ b = 1{,}2 \end{cases}$

Assim $f(x) = -0{,}15x^2 + 1{,}2x$

<u>Nota:</u> Esta resolução pode apresentar formas equivalentes de resolução.

(3):

$V\left(\frac{0+8}{2}; 2{,}4\right) \Leftrightarrow V(4; 2{,}4)$

Os zeros da parábola são $x = 0 \ \wedge x = 8$. Então $f(x) = a(x-0)(x-8)$.

Como o ponto $V(4; 2{,}4)$ pertence a *f*(*x*), substituindo vem:

$2{,}4 = a(4-0)(4-8) \Leftrightarrow 2{,}4 = 4a \times (-4) \Leftrightarrow 2{,}4 = -16a \Leftrightarrow a = -0{,}15$

Assim $f(x) = -0{,}15(x-0)(x-8) = -0{,}15x(x-8)$

<u>Objetos e processos:</u> Na solução (1), os alunos calculam o valor de *h*, através dos zeros da curva, e substituem os valores de *h* e *k* naexpressão da parábola. Através de simplificações descobrem o valor de *a*. Na solução (2) os alunos notam que a parábola passa na origem e por isso $f(x) = ax^2 + bx$, dado que facilmente se calculam as coordenadas do vértice, resolvem a tarefa recorrendo a um sistema com duas incógnitas. Na solução (3) os alunos calculam o valor de *a* recorrendo aos zeros da função *f*. A linguagem usada nas três soluções é simbólica e literal.

<u>Nível de pensamento algébrico:</u> As soluções (1) e (3) são de nível 2 e de carácter algébrico e operacional numa modelação da função quadrática. Resolve-se uma equação do tipo

$Ax \pm B = C$. A solução (2) é de nível 3, uma vez que as expressões sofrem transformações na forma simbólica, havendo conservação da equivalência, além disso, tratam-se variáveis e incógnitas aplicando propriedades estruturais, como por exemplo a substituição. Nas três soluções interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal.

Tarefa 8.2

Os dois postes que suportam a estufa distam 2 metros de cada lado. Qual é a altura dos postes?

(Nota: Caso não tenhas resolvido a alínea anterior, supõe que a equação da parábola é $y = -0{,}15x^2 - 1{,}8x$).

<u>Solução Possível:</u>

(1):

$y = -0{,}15(2-4)^2 + 2{,}4 = 1{,}8$

Resposta: A altura dos postes é de $1{,}8$ metros.

(2):

Os postes estão assentes em $x = 2$ e $x = 6$, uma vez que estão a duas unidades dos zeros.

Como uma parábola é simétrica em relação a $x = h$, em que h é a abcissa do vértice, então $f(h-x) = f(h+x)$, como $h = 4$, então

$f(4-2) = f(4+2) \Leftrightarrow f(2) = f(6)$

$f(2) = -0{,}15 \times (2-4)^2 + 2{,}4 = 1{,}8$

Resposta: A altura dos postes é de $1{,}8$ metros.

(3):

$y = -0{,}15(2-4)^2 + 2{,}4 = 1{,}8$

$y = -0{,}15(6-4)^2 + 2{,}4 = 1{,}8$

Resposta: A altura dos postes é de $1{,}8$ metros.

Objetos e processos: Na solução (1) os alunos apenas calculam f (2) ou f (6), não fazendo qualquer referência que $f(2) = f(6)$. A resolução é de caráter numérico. Na solução (2), os alunos devem identificar o eixo de simetria da parábola. De seguida terão que substituir h por 4, e através de simplificações, calcular f (2) ou f (6). A linguagem usada é simbólico-literal. Na solução (3), os alunos calculam f (2) e f (6), não demonstrando assim que sabem que as alturas dos postes teriam que ser iguais.

Nível de pensamento algébrico: A solução (1) é de nível 1, uma vez que a linguagem é natural e numérica, a altura (valor desconhecido) é representada por um símbolo (y). A solução (2) é de nível 2, e de carácter álgebrico-operacional. Interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. A solução (3) é de nível 0, uma vez que a linguagem é natural e numérica, aparecem símbolos que representam o desconhecido, mas esse valor obtém-se efetuando operações em objetos particulares.

3.4.2. Ficha de trabalho a aplicar aos alunos do 10.º ano

A ficha de trabalho foi aplicada a 24 alunos da turma e tem como objetivo complementar o estudo iniciado com o último teste de avaliação do 2.º período. Assim é constituído por 4 questões, sendo que os alunos tiveram 45 minutos para o resolver. Não foi permitida a consulta do manual, do caderno de apontamentos ou de outros auxiliares. No entanto, foi permitido o uso de calculadora gráfica. No anexo II mostra-se um exemplar por preencher.

Tarefa 1

Considera a seguinte sequência de figuras:

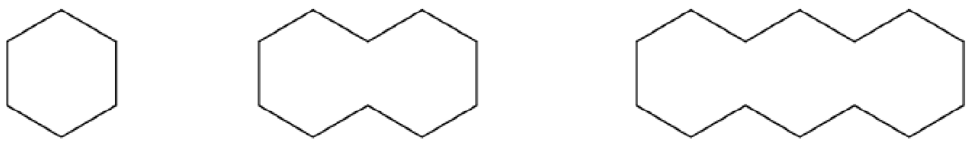


Figura 17: Sequências de palhas usadas nos primeiros três casos

Adaptado de Godino et al. (2015)

Representa os dois termos seguintes da sequência e indica o número de segmentos necessários para construir cada uma. Explica como procedeste.

Solução Esperada:

(1):

n – número de ordem da figura.

$N(n)$ – número de segmentos usados para construir a n-ésima figura.

Termo de ordem 1: $N(1) = 6 + 0 \times 4 = 6$

Termo de ordem 2: $N(2) \ = \ 6 + 1 \times 4 = 10$ $(\ldots)$

Termo de ordem n, ou termo geral da sequência: $N(n) = 6 + (n-1) \times 4 = 4n + 2$

Assim:

$N(4) = 4 \times 4 + 2 = 18$

$N(5) = 4 \times 5 + 2 = 22$

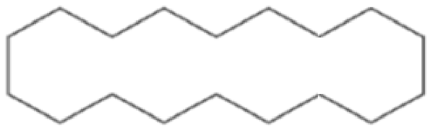


Figura 18: Quarta imagem da sequência – solução 1

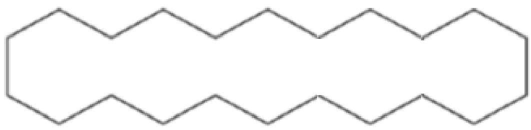


Figura 19: Quinta imagem da sequência – solução 1

Resposta: Para construir a quarta imagem da sequência são necessários 18 palitos e para construir a quinta imagem são necessários 22.

(2):

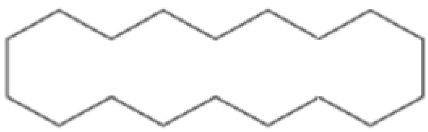
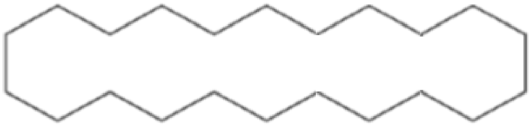


Figura 20: Quarta imagem da sequência – solução 2

-> 18 segmentos



-> 22 segmentos

Figura 21: Quinta imagem da sequência – solução 2

Resposta: Adicionam-se sempre 4 ao número de segmentos, para dar a forma seguinte: $n + 4$.

<u>Objetos e processos:</u> Pretende-se que os alunos encontrem uma regra geral que dê o número de segmentos da figura de ordem *n*. A linguagem usada é simbólico-literal. Os alunos trabalham com a função afim, em que a variável independente é *n* e a variável dependente é $N(n)$. Os alunos devem justificar a fórmula encontrada.

<u>Nível de pensamento algébrico:</u> Os alunos que apenas desenhem a quarta figura da sequência e a quinta figura da sequência, contando um por um os segmentos necessários para construir as respetivas figuras têm uma resolução de nível 0, pois a resposta não inclui características algébricas. A linguagem é natural, numérica e recorreram a imagens. A solução (1) é de nível 3, uma vez que se opera com a variável para obter formas canónicas da expressão. No entanto, se a mesma solução (ou uma equivalente) não apresentar a regra geral na forma canónica, a resolução apenas se encontra no nível 2. A solução (2) é de nível 1, uma vez que intervêm os objetos intensivos cuja generalidade aparece de uma forma explícita perante uma linguagem natural. Aparecem símbolos que se referem a objetos intensivos, mas não há operações com eles.

Tarefa 2

Numa barraca, vende-se o kg de peras a 2€ e cada saco a 0,10€. Supõe que cada saco leva 4 *kg* de peras. Quanto gastarias se comprasses 5 *kg* de peras? E se comprasses 10 *kg*? E se comprasses *x kg* de peras?

Adaptado de Godino et al. (2015)

Solução Esperada:

1 *kg:* custo = $2 \times 1 + 0{,}1$

2 kg: custo = $2 \times 2 + 0{,}1$

3 kg: custo = $2 \times 3 + 0{,}1$

4 *kg:* custo = $2 \times 4 + 0{,}1$

5 *kg:* custo = $2 \times 5 + 2 \times 0{,}1 = 10{,}20€$

6 *kg:* custo = $2 \times 6 + 2 \times 0{,}1$

…

10 *kg:* custo = $2 \times 10 + 3 \times 0{,}1 = 20{,}30€$

…

$C(n) = 2 \times n + I\left(\frac{n-1}{4} + 1\right) \times 0{,}1$, com $I(x)$ a função que nos dá a parte inteira de x e n representa o número de *kg* de peras, sendo que $n \in \mathbb{N}$.

Resposta: Se comprar 5 *kg* irei gastar $10{,}20€$ e se comprar 10 *kg* irei gastar $20{,}30€$.

Objetos e processos: Os alunos devem identificar a variável dependente e independente. Espera-se também que trabalhem com uma função definida por ramos e com a função parte inteira.

Nível de pensamento algébrico: Se o aluno calcular o custo de 5*kg* e 10*kg* de peras, não encontrando nenhuma regra que generalize o modelo matemático, a solução encontra-se no nível 1, uma vez que intervêm os objetos intensivos cuja generalidade aparece de uma forma explícita perante uma linguagem natural, numérica e simbólica, podendo por exemplo, recorrer a uma tabela. Se o aluno apresentar uma regra geral que seja parecida à regra geral correta (por exemplo $C(n) = 2 \times n + 0{,}1$), revela um pensamento algébrico de nível 2, pois interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal que mencionam os objetos intensivos reconhecidos. A solução apresentada requer um conhecimento de nível 3 pois formam-se objetos intensivos que são apresentados de maneira simbólica e literal e encontra-se a forma canónica da regra geral.

Tarefa 3

Utilizando a calculadora gráfica representa graficamente funções reais de variável real da família $f(x) = mx + b$, com m e b reais. Estuda as representações gráficas de funções desta família e indica:

- A existência e o número de zeros;

- Intervalos de monotonia;

Adaptado de Saraiva et al. (2010)

<u>Solução Esperada:</u>

Se $m = 0$ então $f(x) = b$ é estritamente monótona.

Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \mathbb{R}$

Caso $b \neq 0$: Zeros: não tem.

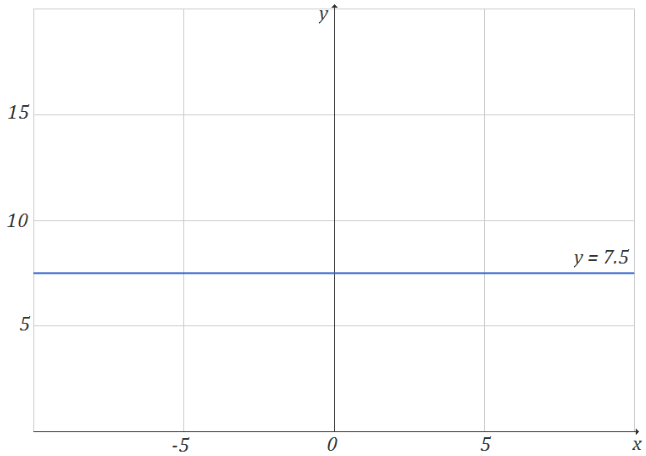


Figura 22: Exemplo de uma representação gráfica do tipo *y* = *k*, *k* ∈ ℝ

Se $m > 0$ então $f(x) = mx + b$ é estritamente crescente.

Caso $b = 0$: Zeros: $x = 0$

Caso $b > 0$: Zeros: $x \in]-\infty, 0[$

Caso $b < 0$: Zeros: $x \in]0, +\infty[$

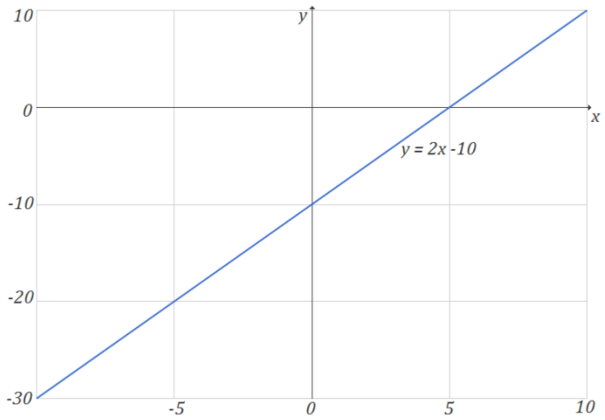


Figura 23: Exemplo de uma representação gráfica da forma *y = mx + b, m > 0*

Se $m < 0$ então $f(x) = mx + b$ é estritamente decrescente.

Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \{0\}$

Caso $b > 0$: Zeros: $x \in]0, +\infty[$

Caso $b < 0$: Zeros: $x \in]-\infty, 0[$

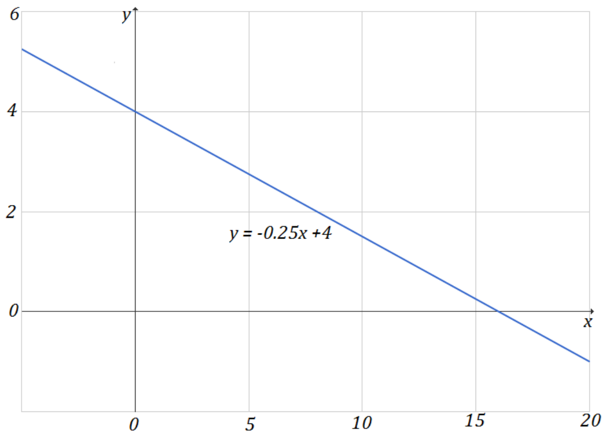


Figura 24: Exemplo de uma representação gráfica do tipo *y = mx + b, m < 0*

<u>Objetos e processos:</u> Os alunos trabalham com a função afim e fazem um estudo de parâmetros destas funções.

Nível de pensamento algébrico: Nível 4, pois os alunos usam parâmetros para expressar equações e famílias de funções.

Tarefa 4

Dada uma função do 2.º grau $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, mostre que as coordenadas do vértice V da parábola descrita por essa função são $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $\Delta = b^2 - 4ac$ e $a \neq 0$.

Sugestão: Considera a função $y = a\,(x-h)^2 + k, a \neq 0$. Nota que o vértice da parábola representativa da função tem coordenadas $V(h,k)$.

Solução Esperada:

(1):

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{ac}{a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + \frac{ac}{a}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Assim, a função $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ pode ser representada na forma:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Deste modo, o vértice da parábola representativa da função tem coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $c.q.d$

(2):

Inicialmente vou provar que *V* é um ponto de coordenadas a função *f*:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Como $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, então $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \epsilon\ f(x)$.

Basta assim provar que o ponto *V* é o vértice da função *f:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sejam x_1 e x_2 os zeros da parábola:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como a abcissa do vértice é o ponto médio entre os zeros, então:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-2b}{2a}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-b}{a}\right) = \frac{-b}{2a}$$

Assim podemos concluir que $\frac{-b}{2a}$ é a abcissa do vértice de f e, deste modo, $-\frac{\Delta}{4a}$ é a ordenada do vértice da mesma função, sendo que *V* é o vértice da parábola. *c.q.d*

Objetos e processos: Na primeira solução, os alunos fazem uso da igualdade como equivalência de expressões. Aplicam a propriedade distributiva da multiplicação, manipulam a expressão mantendo a equivalência, refugiam-se num caso notável da multiplicação (quadrado do binómio) e têm que simplificar a expressão. Na segunda solução, os alunos comprovam que o ponto *V* pertence à função *f*, sendo que para isso recorrem a substituições e à fórmula resolvente. De seguida mostram que esse ponto é o vértice da função *f* recorrendo ao ponto médio dos zeros.

Nível de pensamento algébrico: As soluções apresentadas são de nível 5, uma vez que os alunos fazem um tratamento de parâmetros de modo analítico.

4. Prática de Ensino Supervisionada

Ao longo das aulas assistidas e implementadas, tentei perceber qual era o pensamento algébrico dos alunos nas diversas tarefas que lhes foram dadas para resolver, bem como as dúvidas que eles iam colocando à professora.

As duas planificações de aulas que se seguem foram algumas das intervenções que fiz no âmbito das unidades curriculares Prática de Ensino Supervisionada I e II. No final de cada planificação estará um breve resumo dos acontecimentos principais da aula, no que diz respeito às dúvidas colocadas e ao pensamento algébrico dos alunos durante a aula.

4.1. Planificação da intervenção no 1.º semestre

Tema: Esfera e Superfície Esférica (10.º ano)

Mês/Ano: dezembro/2014

Recursos: Manual do aluno, caneta para escrever no quadro, quadro, retroprojetor, lápis

Tempo previsto: 90 minutos

Objetivos:

Gerais: Apelar à definição da distância no espaço para encontrar a equação geral da esfera e da superfície esférica; Apelar à visualização para resolver exercícios da interseção da esfera/superfície esférica com planos paralelos aos planos coordenados.

Específicos: Os objetivos que se apresentam na Tabela 3 dizem respeito às tarefas propostas para a aula.

Tabela 3: **Desenho de tarefas para a aula – Aula 1**

Objetivos \ Tarefas	S1	S2	89	90	91	92	93	94
Calcular a distância entre dois pontos no espaço	x	x		x				
Identificar o lugar geométrico pedido			x					
Definir por uma condição a superfície esférica ou a esfera				x	x		x	
Identificar a posição relativa de pontos					x			
Escrever a equação de planos paralelos aos planos coordenados tangentes à superfície esférica					x	x		
Indicar as coordenadas do centro da esfera e o raio, dada uma condição						x		
Definir por uma condição a interseção da esfera com os planos paralelos aos planos coordenados						x	x	x
Indicar as coordenadas de pontos no espaço							x	x

Nota: S1 e S2 dizem respeito à situação inicial proposta à turma. As restantes tarefas encontram-se disponíveis no manual do aluno (Costa & Rodrigues, 2014a).

Analise-se de seguida a Tabela 4 que diz respeito à faceta Epistémica do processo de ensino e aprendizagem da Matemática apresentada pelo modelo de Godino (2009).

Tabela 4: **Tipos de primeira entidade para o desenho e análise de tarefas – Aula 1**

Linguagem Esfera; Superfície Esférica; Interseção de esferas com planos; Plano; Coordenadas de pontos; Pontos tangentes ao plano	**Situação inicial:** Calcular a distância entre o centro de uma esfera e um ponto que pertence à superfície esférica da mesma, dadas as coordenadas do centro e desse ponto.
Conceitos/Definições <u>Prévios:</u> Coordenadas de pontos no espaço; Distância entre dois pontos no espaço; Equação da circunferência; Forma das condições que definem planos paralelos aos planos coordenados. <u>Novos:</u> Equação cartesiana da esfera; equação cartesiana da superfície esférica; Interseção de uma esfera com planos paralelos aos planos coordenados.	**Procedimentos:** Aplicar a definição de distância entre dois pontos no espaço e simplificação de expressões numéricas para encontrar o valor do raio e de seguida escrever a condição que define a superfície esférica e a esfera. Apelar à visualização de situações que envolvem a interseção de esferas com planos paralelos aos planos coordenados.

Desenvolvimento da aula

<u>Primeira Parte:</u> A aula terá início com a entrada e acomodação dos alunos na sala de aula, de seguida será escrito o sumário no quadro:

Sumário:

- Esfera e superfície esférica.
- Interseção de planos paralelos aos planos coordenados com a esfera e a superfície esférica.
- Resolução de exercícios.

<u>Segunda Parte:</u> A aula irá continuar com a projeção da situação inicial no quadro, sendo que o objetivo principal desta será motivar os alunos para o início do estudo da esfera e da superfície esférica. Na tarefa 1 da situação será pedido a um aluno que leia o enunciado e a primeira alínea. A professora estagiária irá chamar um aluno ao quadro para a resolver. Caso os alunos apresentem dúvidas a calcular a distância entre dois pontos no espaço, a professora

estagiária deverá perguntar qual é a fórmula da distância entre dois pontos no espaço que os alunos deram a algumas aulas atrás.

De seguida, a professora estagiária (ou um aluno) irá ler a tarefa 2. A docente deve chamar alguém ao quadro para a resolver esta tarefa. Após ser resolvida a primeira alínea, será dada a definição de superfície esférica e após ser resolvida a segunda alínea, será dada a definição de esfera, com as respetivas fórmulas. Não são esperadas dúvidas na resolução das tarefas, no entanto, se surgirem, a professora estagiária deve relembrar qual é a expressão da distância entre dois pontos no espaço.

Após a resolução da situação inicial, será proposta a resolução da tarefa 89 da página 133. Esta será resolvida pelos alunos sentados no lugar e se surgir a dúvida: "O que é um lugar geométrico?", será respondido que é o conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade.

Na tarefa 90 da página 133 não são esperadas dúvidas, uma vez que é apenas para aplicar diretamente a equação da superfície esférica.

Na tarefa 91 da página 133, não se espera que os alunos tenham dúvidas nas primeiras duas alíneas, uma vez que, na primeira alínea, é a aplicação direta da expressão da superfície esférica, e o raciocínio a aplicar na segunda alínea é o mesmo que os alunos aplicavam nas circunferências. Na terceira alínea poderão surgir algumas dificuldades na visualização dos planos $y = 2$ e $y = 8$. Caso isso aconteça, a professora estagiária deve ajudar os alunos a desenhar a superfície esférica e os planos pedidos, para isso irá ter a ajuda do programa *GeoGebra3D*.

Relativamente à tarefa 92 da página 134, não são esperadas dúvidas na primeira alínea uma vez que é apenas para indicar as coordenadas do centro e o raio da esfera. Na segunda alínea, caso os alunos não estejam a conseguir visualizar os planos $z = 4$ e $z = -4$, será construída (no quadro) uma representação geométrica dos planos em causa e da esfera, para que os alunos consigam perceber o que é pedido. Na terceira alínea, para acompanhar a resolução dos alunos, será mostrado a representação gráfica da interseção da esfera com os diferentes planos de corte. Caso os alunos tenham dúvidas a identificar o centro das circunferências (obtidas através da secção de corte) ou a calcular o raio das mesmas, será explicado aos alunos que apenas se está a fazer a interseção de duas condições, a da esfera e a do plano em causa.

Na tarefa 93 da página 134 não se esperam dúvidas nas duas primeiras alíneas, no entanto, na última alínea, poderão aparecer incertezas nas respostas dadas, uma vez que o raio é zero, ou seja, a interseção da esfera com o plano não dá uma circunferência mas sim um ponto. Caso isso aconteça, a professora estagiária deve explicar aos alunos que o plano de corte apenas toca num ponto da esfera porque esse plano é tangente à superfície esférica.

Na primeira alínea da tarefa 94 da página 135, podem surgir dificuldades se os alunos não identificarem que têm de usar o teorema de Pitágoras no triângulo [ABC]. Se isso acontecer, a professora estagiária poderá desenhar o triângulo [ABC] no quadro, tendo como objetivo que os alunos percebam que o triângulo é retângulo. Na segunda alínea, os alunos podem apenas responder que $z = 8$, se isso acontecer, os alunos devem ser chamados à atenção que apenas se está a pedir a superfície do líquido, e como tal ela é limitada por uma circunferência.

Situação inicial:

O João recebeu, no Natal, várias bolas de berlinde e a Ana uma bola de ténis.

1) A Ana desenhou um ponto na sua bola para que a distinguisse das outras. De seguida, colocou-a sobre um referencial o.m. de modo a que o centro estivesse no ponto (1, 2, 3). Após observar a figura, reparou que o ponto que ela tinha desenhado tinha de coordenadas (3, 0, 4). Qual é a distância entre o ponto que a Ana desenhou e o centro?

Resposta: Seja A o ponto desenhado pela Ana e C o centro da bola de ténis, então:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2 + (4-3)^2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4+4+1} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3$$

<u>NOTA:</u> Após os alunos calcularem a distância entre os dois pontos, a professora estagiária deve fazer notar que a distância calculada é o raio da bola.

2) Seja $C\ (a, b, c)$ o centro de uma das bolas de berlinde do João.

a. Considere-se $P\ (x, y, z)$ um ponto genérico que pertence à superfície esférica da bola. Qual a propriedade geométrica a que satisfaz o ponto P, nestas circunstâncias?

Esta equivalência é verdade porque o raio (r) e $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ são maiores ou iguais a zero.

Resposta:

$\overline{PC} = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

$\Leftrightarrow r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

NOTA: Após este exercício, a professora estagiária deve dar a definição de superfície esférica.

Definição: A superfície esférica de centro $C\ (a, b, c)$ e raio r ($r > 0$) é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a C é igual a r. Num referencial o. m., a superfície esférica é definida pela condição: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$.

b. Considere-se $P\ (x_1, y_1, z_1)$ um ponto genérico que pertence ao interior da bola de berlinde do João. O que sabemos sobre a posição do ponto em relação ao centro?

Esta equivalência é verdade porque r e $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}$ são maiores ou iguais a zero.

Resposta:

$\overline{PC} = \sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}$

Mas $\overline{PC} \leq r$, então

$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2} \leq r$

$\Leftrightarrow (x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2 \leq r^2$

NOTA: Após este exercício, a professora estagiária deve dar a definição de esfera.

Definição: A esfera de centro $C\ (a, b, c)$ e raio $r\ (r > 0)$ é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a C é menor ou igual a r. Num referencial o. m., a esfera é definida pela condição: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq r^2$.

Resolução dos exercícios do manual

Página 133:

Exercício 89:

89.1) Superfície esférica de centro em A e raio 5.

89.2) Esfera de centro em A e raio 3.

Exercício 90:

Raio = $\overline{EF} = \sqrt{(0-1)^2+\ (1-(-1))^2+(-3-2)^2}\ =\ \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

Superfície Esférica de centro em E e que passa em F:

$(x-0)^2+\ (y-1)^2+\left(z-(-3)\right)^2=\left(\sqrt{30}\right)^2$

$\Leftrightarrow\ x^2+\ (y-1)^2+\ (z+3)^2=30$

Exercício 91:

91.1) Superfície Esférica de centro em C e que é tangente ao plano coordenado xOy:

Raio = 3

$(x-4)^2+\ (y-5)^2+(z-3)^2=3^2$

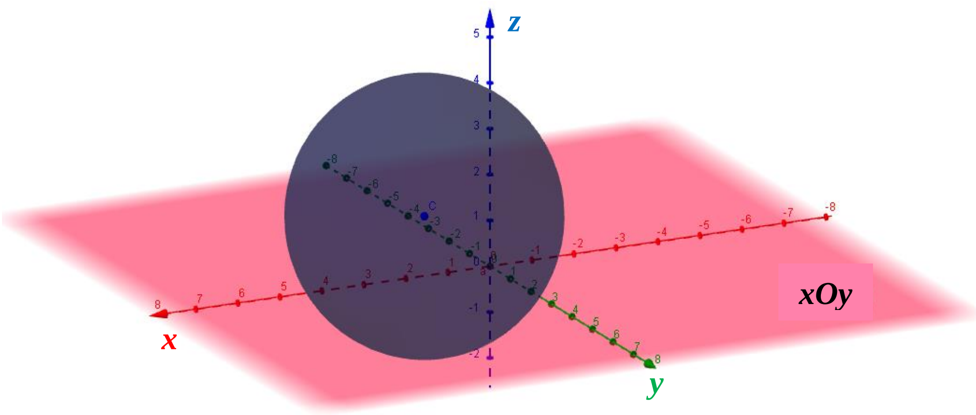


Figura 25: Superfície esférica de raio 3 e centro de coordenadas (4, 5, 3)

91.2) $\overline{CP} = \sqrt{(4-6)^2 + (5-7)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\overline{CR} = \sqrt{(4-5)^2 + (5-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

Como $\overline{CP} = 3 = raio$, então P pertence à superfície esférica.

Como $\overline{CR} = \sqrt{6} < raio$, então R pertence ao interior da superfície esférica.

91.3) São os planos y = 2 e y = 8.

Se os alunos tiverem dificuldades, a professora estagiária deve refugiar-se na imagem abaixo e perguntar: "Partindo do centro, qual é a distância, segundo a direção do eixo das ordenadas que tenho que percorrer para chegar à superfície esférica?" Escrevendo depois no quadro:

$$y = 5 + 3 \vee y = 5 - 3$$
$$\Leftrightarrow y = 8 \vee y = 2$$

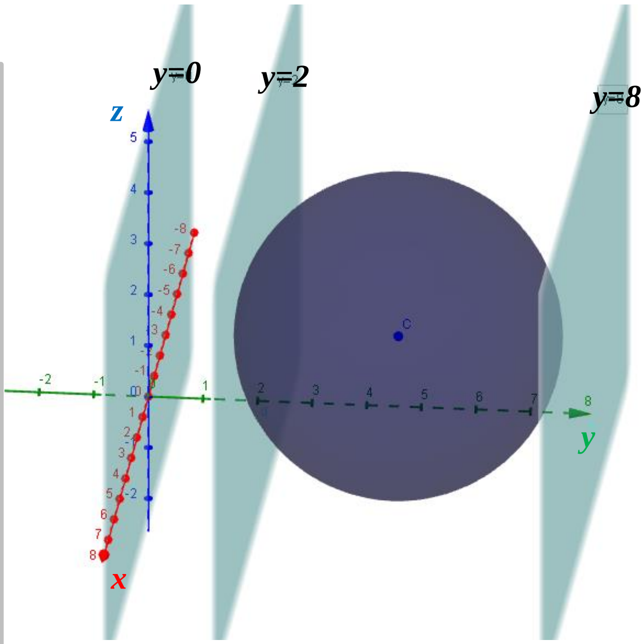


Figura 26: Planos tangentes à superfície esférica

Página 134:

Exercício 92:

92.1) C (-1, 3, 0) e raio 4

92.2) z = 4 e z = - 4.

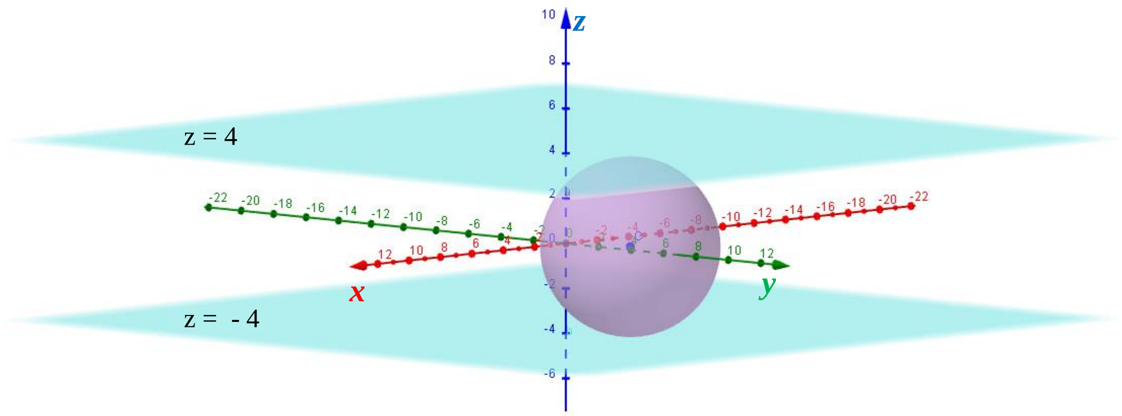


Figura 27: Planos tangentes paralelos à esfera

92.3)

> A professora estagiária deve mostrar as imagens que representam o pedido, caso os alunos apresentem dúvidas.

92.3.1) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + 0^2 \leq 16 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 16$

Círculo de centro (-1, 3, 0) e raio $\sqrt{16}$ = 4, contido no plano z = 0.

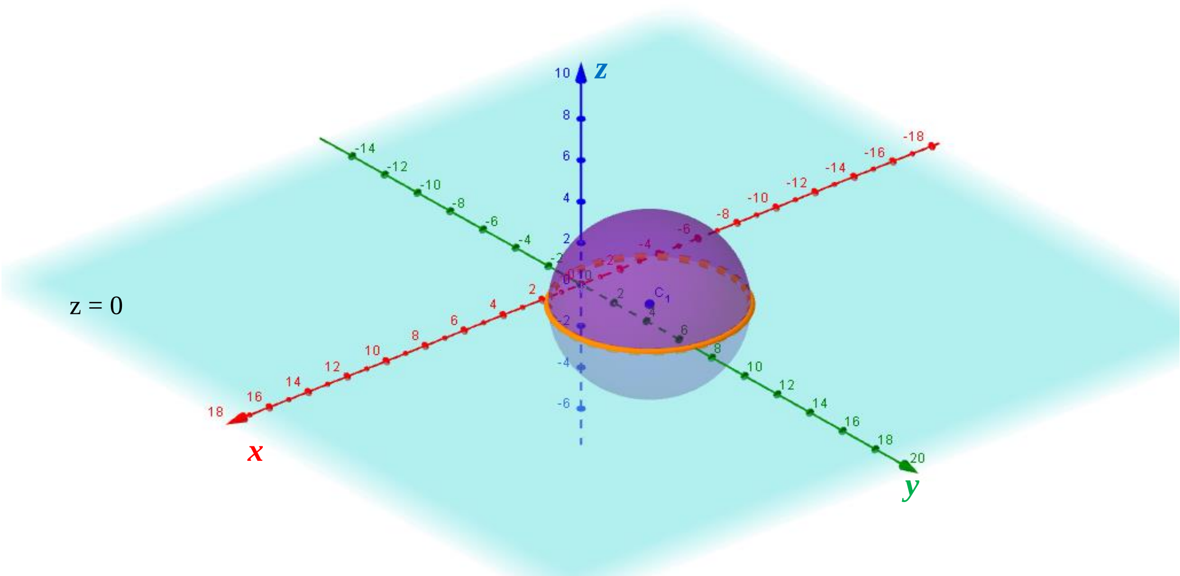


Figura 28: Interseção de uma esfera com o plano z = 0

92.3.2) $(0+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 \leq 16 \Leftrightarrow (y-3)^2 + z^2 \leq 15$

Círculo de centro (0, 3, 0) e raio $\sqrt{15}$, contido no plano *x* = 0.

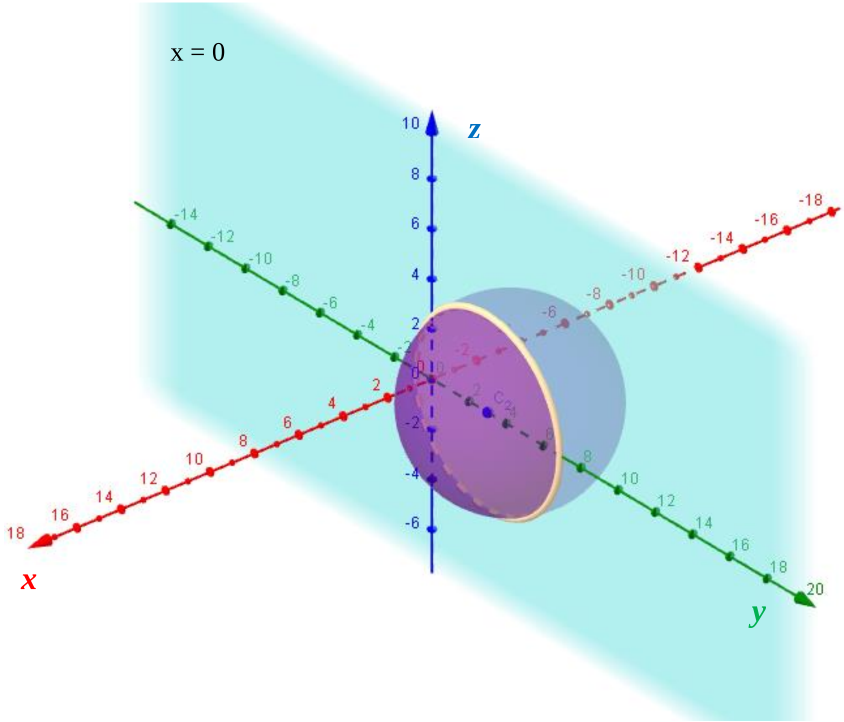


Figura 29: Interseção de uma esfera com o plano *x* = 0

92.3.3) $(x+1)^2+(1-3)^2+z^2 \leq 16 \Leftrightarrow (x+1)^2+z^2 \leq 12$

Círculo de centro (- 1, 1, 0) e raio $\sqrt{12}$, contido no plano *y* = 1.

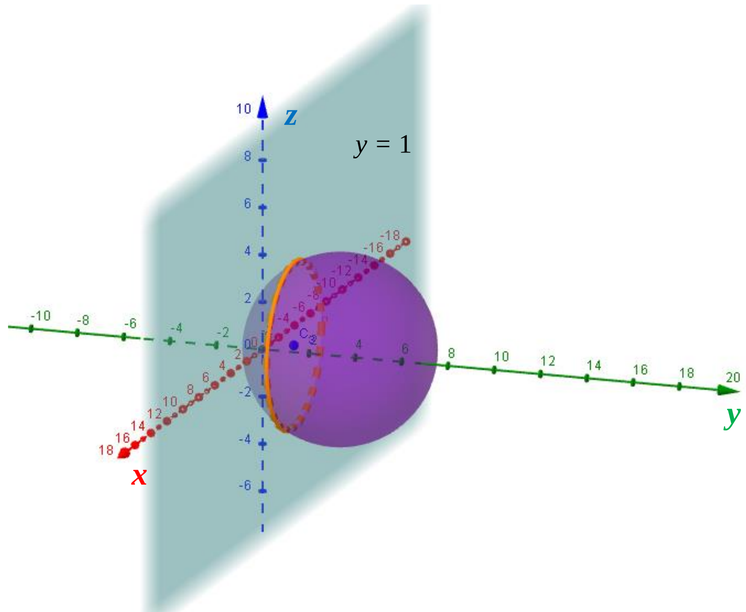


Figura 30: Interseção de uma esfera com o plano *y = 1*

Exercício 93:

93.1) G (0, 8, 6)

93.2)

> Caso os alunos apresentem dúvidas nesta alínea, a professora estagiária deve explicar que o raio da esfera é a metade da aresta do cubo e o centro encontra-se através do ponto médio dos segmentos [AD], [DC] e [CG] por exemplo.

Centro (3, 5, 3) e raio 3.

$(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 \leq 9$

93.3) $(x-3)^2 + (8-5)^2 + (z-3)^2 \leq 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (z-3)^2 \leq 0$

Como $r = 0$, então é apenas o ponto de coordenadas (3, 8, 3).

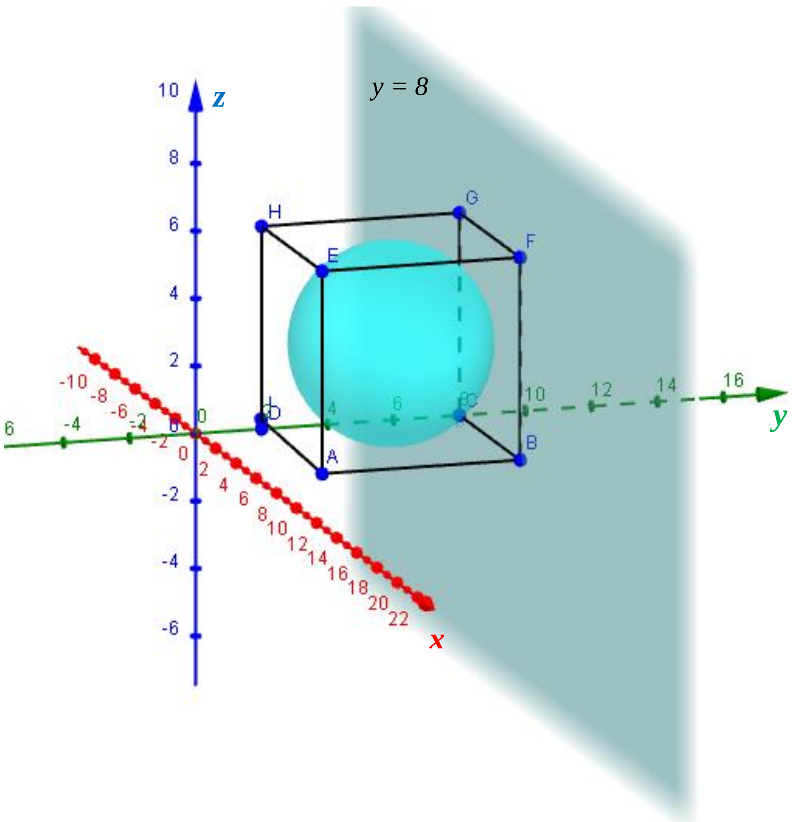


Figura 31: Interseção de uma esfera com um plano tangente a ela

Página 135:

Exercício 94:

94.1)

Se os alunos tiverem dúvidas, deve ser mostrada a Figura 32. Fazendo notar que o ângulo $A\hat{B}C$ é retângulo.

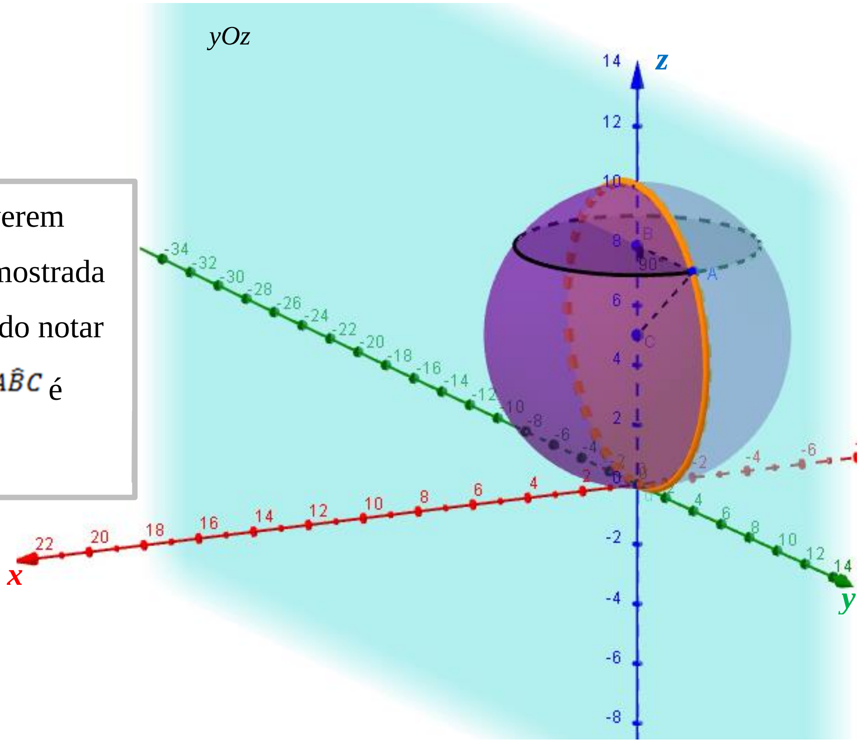


Figura 32: Descobrir as coordenadas de um ponto

Como A pertence ao plano yOz então $x = 0$, como pertence também à superfície do líquido então $z = 8$ e aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo [ABC] vem:

$\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BA}^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \vee \cancel{x = -4}$

Então A (0, 4, 8).

94.2) $x^2 + y^2 + (z-5)^2 \leq 25 \wedge z = 8$ ou $x^2 + y^2 \leq 16$

Página 191:

Proposta 34:

1) z = 5
2) (4, 4, 0)

3) Raio = $\frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$ Centro $(4, 4, \frac{5}{2})$

Esfera: $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-\frac{5}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$

4) $(x-4)^2 + (y-4)^2 + \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \wedge z = 3$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 + \left(3-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = \frac{24}{4}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 6$

Resposta: O raio do círculo é $\sqrt{6}$.

Acontecimentos mais importantes

A aula iniciou-se com a escrita do sumário no quadro. Enquanto os alunos se acomodavam nos lugares, fui projetando o *power point* que tinha preparado para a prática.

Para resolver os exercícios do manual, decidi recorrer ao *GeoGebra3D* para construir imagens de apoio, pois com estas imagens os alunos tinham a oportunidade de estar mais atentos à aula, uma vez que não tinham que tentar visualizar o que era pedido.

Embora os alunos tenham sido muito participativos nesta aula, quero apenas destacar algumas dúvidas e comentários interessantes que foram feitos. Quando os alunos estavam a resolver o exercício 92.3.3. (Costa & Rodrigues, 2014a, p.134), um aluno comenta que é importante escrever que “a circunferência está contida no plano $y = 1$ porque quando se faz a interseção de uma esfera com um plano obtém-se uma circunferência que tem que estar contida nesse plano”. O aluno quis assim dizer que se escrevêssemos apenas o raio e o centro da circunferência, não conseguíamos saber qual era o plano em que ela se encontrava. Por este motivo, considero que o uso do *GeoGebra3D* foi uma mais-valia, pois caso não tivesse recorrido a este instrumento, possivelmente, o aluno não tinha notado que apenas com o centro e o raio da circunferência, estávamos a definir uma infinidade de circunferências.

Quando estava a resolver a última alínea do exercício 93 (Costa & Rodrigues, 2014a, p.134), um aluno comenta que ele não está a conseguir escrever a equação da circunferência porque o raio é zero. Após este comentário, um outro aluno intervém de imediato afirmando que, nesta situação, o resultado não é uma circunferência, mas sim um ponto, pois o plano é tangente à superfície esférica.

Para resolver a 1.ª alínea do exercício 94 (Costa & Rodrigues, 2014a, p.135), chamei um aluno ao quadro. Inicialmente foi necessário desenhar (em cima da figura projetada) o triângulo retângulo, pois o aluno estava com dificuldades em começar. No entanto, após ter dado esta ajuda, o aluno não teve dificuldades em resolver bem o exercício, escrevendo:

$$\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BA}^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + x^2 \Leftrightarrow$$
$$-x^2 = 9 - 25 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$$

Então A (0, 4, 8), pois x é uma distância.

O que me levou a concluir que, naquela tarefa, o seu nível de pensamento algébrico tinha sido o 2, pois interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal, estando a informação relacionada com o espaço. Para além disso, a tarefa é estrutural e é da forma $Ax \pm B = C$.

4.2. Planificação da intervenção no 2.º semestre

Tema: A função quadrática em contexto real (10.º ano).

Mês/Ano: março/2015.

Tempo previsto: 90 minutos.

Recursos: Manual do aluno, caneta para escrever no quadro, quadro, calculadora gráfica, lápis, caderno.

Objetivos:

<u>Gerais:</u> Apelar à visualização de representações gráficas para resolver exercícios em contexto real, usando para isso a calculadora gráfica; Apelar à importância do domínio e contradomínio das funções; Apelar à relação entre a linguagem corrente e a linguagem funcional.

<u>Específicos</u>**:** Os objetivos que se apresentam na Tabela 5 referem-se aos exercícios propostos para a aula, que se encontram disponíveis no anexo III e no manual do aluno (Costa & Rodrigues, 2014b).

Tabela 5: **Desenho de tarefas para a aula – Aula 2**

Exercícios / Objetivos	1.1	1.2	2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3
Usar a calculadora gráfica e indicar o domínio e contradomínio da função atendendo ao contexto do problema	x		x	x					x		x	
Retirar informação da representação gráfica (máximo, zeros, pontos de interseção…)		x	x			x			x		x	x
Recorrer ao cálculo algébrico			x		x	x	x		x			x
Definir a expressão algébrica da função			x			x		x		x		
Resolver inequações do 2.º grau					x							
Usar critérios de semelhança de triângulos							x					
Determinar analiticamente os zeros e as coordenadas do máximo da função									x			
Relacionar a Álgebra com a Geometria							x			x		x

Analise-se de seguida a Tabela 6 que diz respeito à faceta Epistémica do processo de ensino e aprendizagem da Matemática apresentada pelo modelo de Godino (2009).

Tabela 6: **Tipos de primeira entidade para o desenho e análise de tarefas – Aula 2**

Situação inicial: Usar a calculadora gráfica para identificar o máximo, o instante inicial e os zeros da função (no domínio e contradomínio que respeitam o contexto do problema).	**Procedimentos:** Usar a calculadora gráfica para resolver situações em contexto real; Determinar o vértice e os zeros da parábola; Usar cálculo algébrico para simplificar expressões algébricas; Resolver inequações de 2.º grau.
Proposições: Critérios de semelhança de triângulos	**Argumentos:** Justificar, no exercício 3.3 porque definem a função L como $L(x) = p(x) - t(x)$.
Linguagem: Máximo, zeros, domínio, contradomínio, expressão algébrica, função, inequações, representação gráfica e triângulo.	**Conceitos:** Área e perímetro de um retângulo; A abcissa do vértice da parábola pode-se obter calculando o ponto médio dos zeros da função.

Desenvolvimento da aula

Primeira Parte: A aula terá início com a entrada e acomodação dos alunos na sala de aula. De seguida, será escrito o sumário no quadro:

Sumário:

- Resolução de exercícios em contexto real.

Segunda Parte: A aula irá continuar com uma tarefa simples que se pretende resolver com a ajuda das capacidades gráficas da calculadora. Se surgirem dúvidas, na segunda alínea da primeira tarefa, a professora estagiária deve encaminhar a resposta dos alunos, perguntando assim de que altura a bola foi lançada, quantos segundos passaram até que ela chegasse ao chão e qual foi a altura máxima que a bola atingiu (e em que instante).

Na tarefa 2, é possível que alguns alunos, por distração, digam que se o comprimento for x, então a largura será $100 - x$. Nessa situação, o professor deve desenhar o retângulo no quadro e atribuir um valor a x, por exemplo $x = 10$ e perguntar, “se o retângulo tiver 10 *cm* de comprimento tem 90 *cm* de largura?”. Após isto, é esperado que os alunos consigam chegar às relações: $100 = 2c + 2l$ e $A = cl$, assim substituindo, $A(c) = c\,(50 - c)$.

Na tarefa 3.2, é possível que alguns alunos tenham dificuldades em simplificar a expressão e indicar o conjunto de solução. Nessa situação, a professora estagiária deve ajudar os alunos de acordo com os erros que estiverem a ser cometidos.

Na tarefa 4.1, é provável que os alunos tenham dificuldades em justificar que o comprimento do retângulo é $30 - x$. Assim, serão ouvidas as suas justificações e, caso seja necessário, a professora estagiária deve encaminhar os alunos a usarem o critério de semelhança de triângulos LAL.

Por fim, quanto à tarefa 5, alguns alunos poderão ter dificuldade em escrever: $h = f(b) = 5b - b^2$. Caso isso aconteça, a professora estagiária deve particularizar a situação, perguntando, por exemplo, se $x = 1$, qual é a altura? E se $x = 4$? Então e se $x = b$? Para que os alunos cheguem à expressão desejada.

<u>Nota:</u> Os exercícios que não serão feitos na aula serão mandados como proposta de trabalho de casa.

Exercício 1:

Uma criança lança uma bola ao ar. A distância a que a bola está do chão (em metros), ao longo do tempo t (em segundos) é dada pela função h definida por:

$$h(t) = -\frac{7}{10}t^2 + 3t + \frac{6}{5}.$$

Considera que a bola termina o movimento quando atinge a superfície.

1. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, faz uma representação gráfica da função h e, tendo em consideração o contexto do problema, indica o domínio e o contradomínio de *h*(*t*). Sempre que achares pertinente conserva uma casa decimal.

   <u>Solução esperada:</u>

   Pela calculadora:

   $D_h = [0; 4{,}7[$ e $D'_h = [0; 4{,}4]$

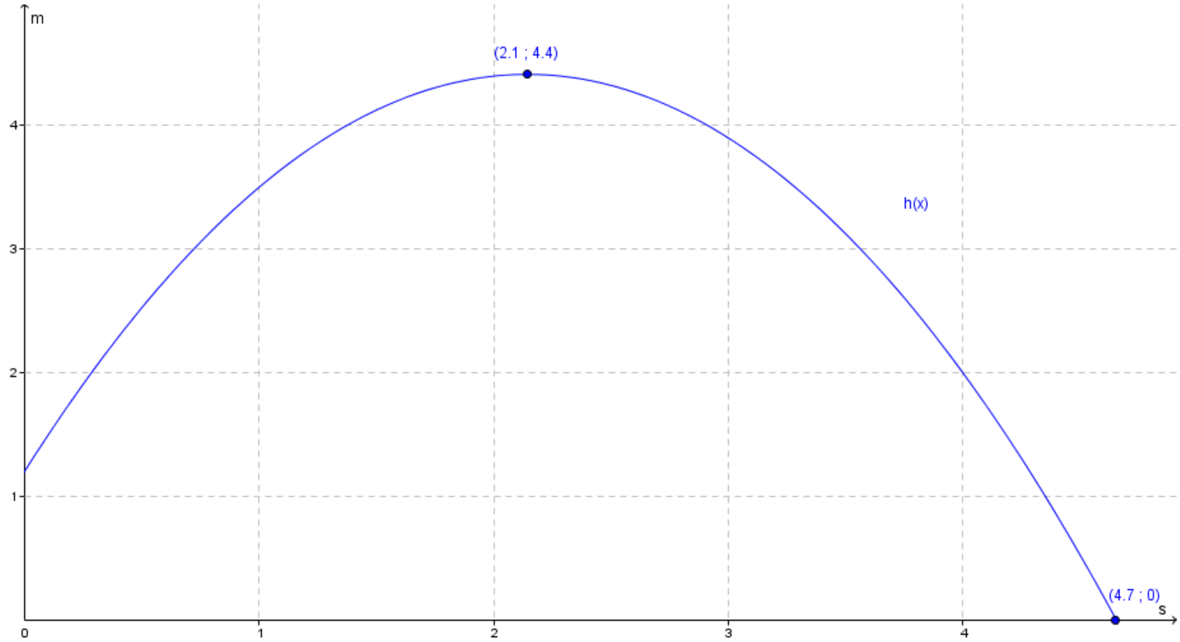


Figura 33: Representação gráfica da função *h*

2. Interpreta e descreve todas as informações que obténs através da representação gráfica da alínea anterior. Conserva uma casa decimal sempre que achares pertinente na indicação das coordenadas dos pontos considerados relevantes.

Solução esperada:

Na imagem inicial, ou seja, quando $t = 0$, a bola foi atirada a uma altura de $1{,}2\ m$ e chega ao chão quando passaram $4{,}7$ segundos. Graficamente é possível ver também que a altura máxima que a bola atingiu é de $4{,}4\ m$. A bola atingiu a sua altura máxima $2{,}1s$ após ter sido lançada ao ar.

Exercício 2:

A Francisca tem uma corda com 1 metro de comprimento e pretende construir um retângulo com ela. Qual o retângulo de maior área que pode construir utilizando apenas essa corda?

Adaptado de Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles. (1997, p. 53)

Solução esperada:

Na Tabela 7 figuram algumas dimensões possíveis do retângulo e as correspondentes áreas.

Tabela 7: **Dimensões possíveis do retângulo**

Comprimento	5	15	25	35	45
Largura	45	35	25	15	5
Área	225	525	625	525	225

Um retângulo tem comprimento c e largura l. Como o perímetro é sempre 100 *cm*, sabe-se que $2c + 2l = 100$. A área é dada por $A = cl$, pelo que o objetivo é maximizar a área com a restrição do perímetro ser constante.

Pode escrever-se a largura em função do comprimento, $l = 50 - c$, e então procurar-se o máximo de $A(c) = c(50 - c) = 50c - c^2$.

Na calculadora gráfica pretende-se obter o máximo entre 0 e 50 e, com base na Tabela 7, podem enquadrar-se os valores de *y* entre 0 e 650.

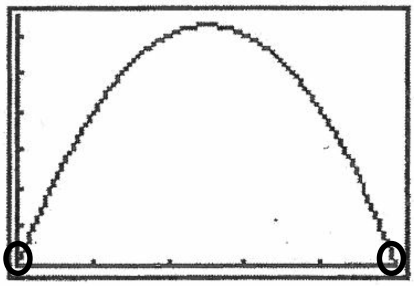


Figura 34: Representação gráfica da função *A*

Assim, o máximo da função *A* é:

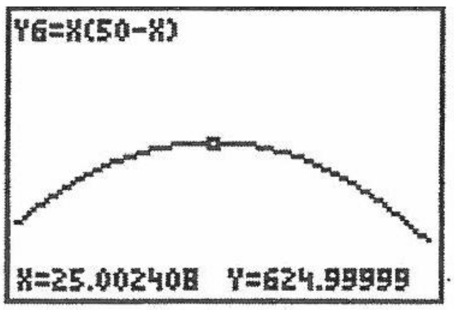


Figura 35: Máximo da função *A*

Com recurso à calculadora gráfica, rapidamente se encontra o máximo de *A*(*c*), assim este obtém-se quando *c = 25*, deste modo, a área máxima é de *625 cm²*.

Resposta: O retângulo de área máxima é o quadrado de lado *25 cm* e área de *625 cm²*.

Analiticamente, os alunos podiam calcular os zeros da função *A*. Note-se que *A(c) = 0* quando *c = 0* ou *c = 50*. O máximo da função é assim atingido na abcissa do vértice da parábola: $x_v = \frac{0+50}{2} = 25$. Assim, ao substituir na função *A*, obtém-se: *A(25) = 625*, ou seja a área máxima é de *625* cm^2.

Exercício 3:

O preço que é pago (em €) ao lenhador de uma dada região varia de acordo com a área que ele corta (em m^2) da floresta mais próxima. Essa relação é dada pela função p, em que $p(x) = -0{,}4x^2 + 200x$. Por outro lado, a taxa de impostos que o lenhador tem que pagar (em €) em função da área cortada (em m^2) é dada pela função t, definida pela expressão $t(x) = \frac{3}{2}x^2 - 18x$.

1. Tomando em consideração que a floresta mais próxima tem 250 m^2 de área e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, indica o domínio e contradomínio das funções p e t. Apresenta os extremos do intervalo arredondado às unidades.

   <u>Solução esperada:</u>

   $D_p = D_t = [0, 250]$;

   Analisando a Figura 36 é possível verificar que:

   $D'_p = [0; 25000]$
   $D'_t = [0;\ 89250]$

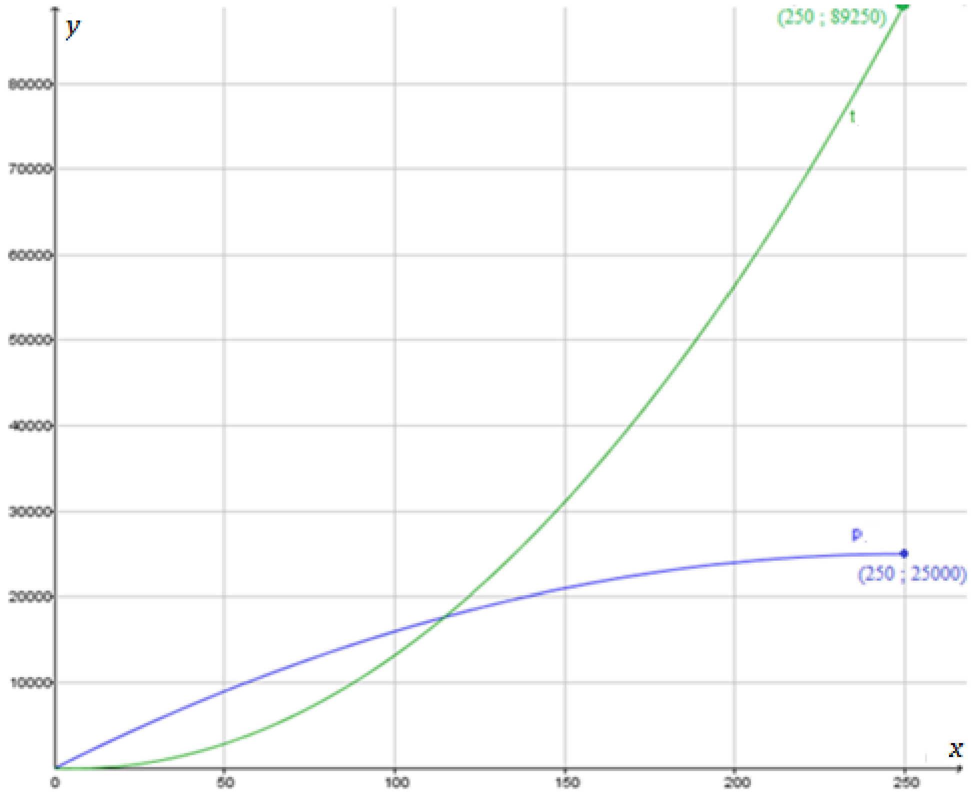


Figura 36: Representação gráfica das funções *t* e *p*

2. Quando é que a taxa de impostos é superior ao preço que pagam ao lenhador por área cortada? Apresenta todos os cálculos que efetuaste.

<u>Solução esperada:</u>

$$t(x) > p(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 18x > -0{,}4x^2 + 200x \Leftrightarrow \frac{4}{10}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 200x - 18x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^2 + \frac{15}{10}x^2 - 218x > 0 \ \Leftrightarrow \frac{19}{10}x^2 - 218x > 0$$

$Zeros$:

$$\frac{19}{10}x^2 - 218x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{19}{10}x - 218\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \frac{19}{10}x - 218 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \frac{19}{10}x = 218 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{2180}{19}$$

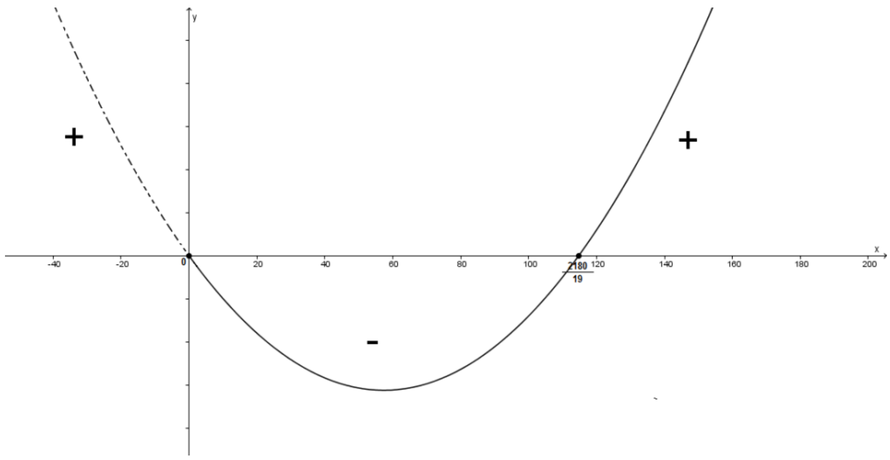


Figura 37: Sinal da inequação em estudo

Resposta: $S = x \in \left]\frac{2180}{19}, 250\right]$.

3. Qual a área de floresta, em m^2, que o lenhador deve cortar de modo a que tenha lucro máximo?

Solução esperada:

$$L(x) = p(x) - t(x) \Leftrightarrow L(x) = \left(-0{,}4x^2 + 200x\right) - \left(\frac{3}{2}x^2 - 18x\right)$$

$$\Leftrightarrow L(x) = -0{,}4x^2 + 200x - \frac{3}{2}x^2 + 18x = -\frac{4}{10}x^2 + 218x - \frac{3}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow L(x) = -\frac{19}{10}x^2 + 218x$$

Pela análise da Figura 38, verifica-se que:

A(57 ; 6253,16) é o máximo da função L;

B (-114,74 ; 0) é o zero da função L;

C é o ponto de coordenadas (250 ; -64250)

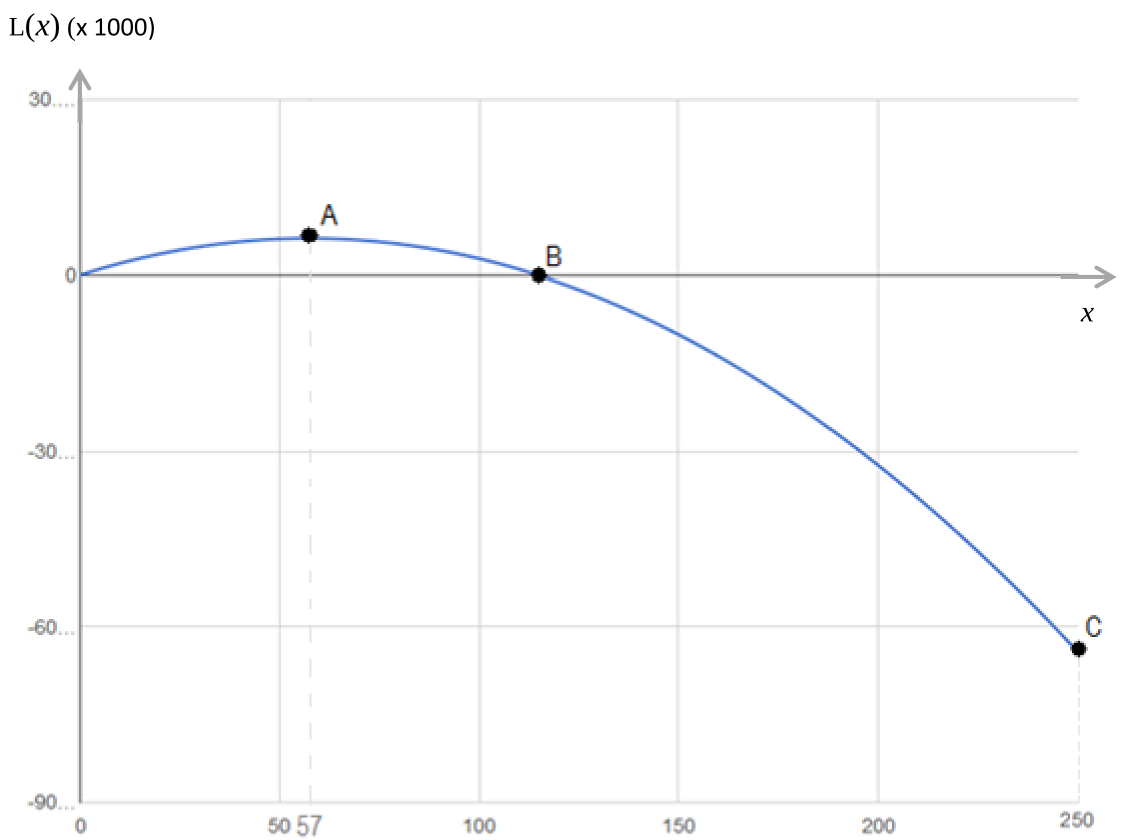


Figura 38: Representação gráfica da função *L*

Resposta: O lenhador deve cortar 57 m^2.

Exercício 4:

Numa vidraria existem sobras de vidro na forma de triângulos retângulos isósceles, cujos catetos têm 30 cm de comprimento. Pretende-se fazer o aproveitamento destas sobras e, para isso, o administrador solicitou a um funcionário que fizesse um estudo de modo a obter retângulos com a maior área possível.

O funcionário responsável por esse estudo fez um esquema considerando um triângulo isósceles [ABC] e um ponto P pertencente ao lado [BC].

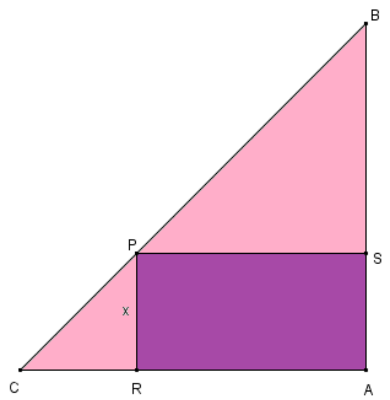


Figura 39. Forma do vidro em que se pretende retirar um retângulo

A partir deste ponto seriam estudados cortes paralelamente aos catetos, obtendo-se assim um retângulo, como a Figura 39 ilustra.

Adaptado de Costa e Rodrigues (2014b, p.119)

1. Mostra que o perímetro do retângulo é sempre constante, independentemente da posição do ponto P.

   <u>Sugestão de Resolução:</u>

   Pelo critério LAL, os triângulos [ABC] e [SPB] são semelhantes, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{SP}} \Leftrightarrow \frac{30}{30-x}=\frac{30}{\overline{SP}} \Leftrightarrow \overline{SP}=30-x$$

   $P_{retângulo}=2\times(30-x)+2x=60-2x\ +2x=60\ cm$

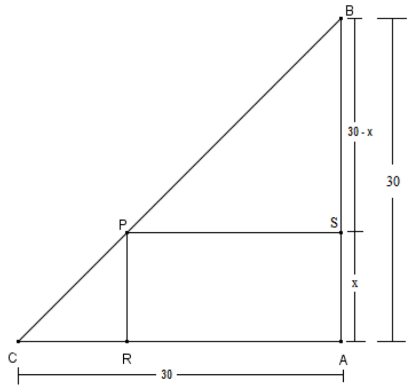


Figura 40. Dimensões do retângulo e dos triângulos

2. Define uma expressão que relacione a área do retângulo com o comprimento x do lado [PR]. <u>Solução Esperada:</u> $A(x)=x\ (30-x)=-\ x^2+30x$

3. Determina as dimensões do retângulo de modo que a área de vidro aproveitada seja máxima.

   <u>Sugestão de resolução:</u>

   Analiticamente:

   $A(x)=0 \Leftrightarrow -\ x^2+30x=0 \Leftrightarrow x(-x+30)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee -x+30=0$

   $\Leftrightarrow x=0 \vee x=30$

   Seja $V\ (x_V,y_V)$ o vértice da parábola. Então $x_V=\ \frac{0+30}{2}=15$

   Assim o retângulo terá 15 cm de um lado e $30-15=15\ cm$ do outro, ou seja, será um quadrado com 15 cm de lado.

<u>NOTA para o professor:</u> Não é necessário calcular o y_V uma vez que a pergunta pedia só as dimensões do retângulo para que a área fosse máxima e não o valor da área máxima.

Com recurso às capacidades gráficas da calculadora:

Y1 = $-x^2 + 30x$

Janela Usada:

$x_{min} = 0$

$x_{max} = 30$

$y_{min} = 0$

$y_{max} = 250$

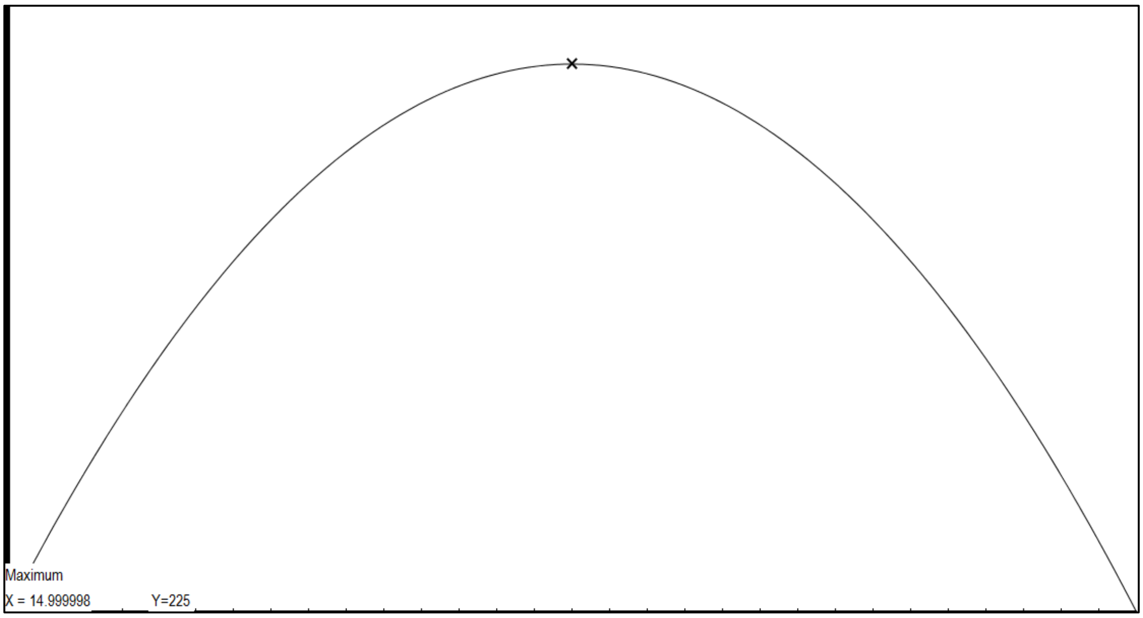


Figura 41: Representação gráfica de Y1

Resposta: Para que a área fosse máxima, o retângulo teria que ter 15 cm de um lado e $30 - 15 = 15$ cm do outro, ou seja, teria que ser um quadrado com 15 cm de lado.

Exercício 5:

Considera a função quadrática f definida por $f(x) = 5x - x^2$. O ponto B pertence ao gráfico de f e tem abcissa $b \in]\ 0, 5\ [$. Para cada valor de B é construído um triângulo $[OAB]$ (como é sugerido na Figura 42).

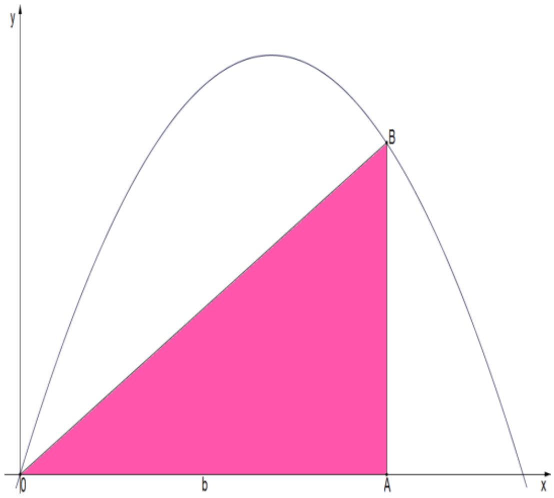


Figura 42. Situação alusiva ao enunciado do exercício

Adaptado de Costa e Rodrigues (2014b, p.130)

1. Exprime a área do triângulo $[OAB]$, em função de b.

Solução Esperada:

$A_{triângulo} = \frac{b \times h}{2}$ $\quad\quad\quad\quad$ $h = f(b) = 5b - b^2$

$A(b) = \frac{b \times (5b - b^2)}{2} = \frac{5b^2 - b^3}{2} = -\frac{1}{2}b^3 + \frac{5}{2}b^2$, com $b \in]0, 5[$

2. Recorrendo à calculadora, determina b de modo que a área do triângulo $[OAB]$ seja máxima. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Solução Esperada:

Y1 = $(-1/2)X^3 + (5/2)X^2$

Janela Usada:

$x_{min} = 0$

$x_{max} = 5$

$y_{min} = 0$

$y_{max} = 10$

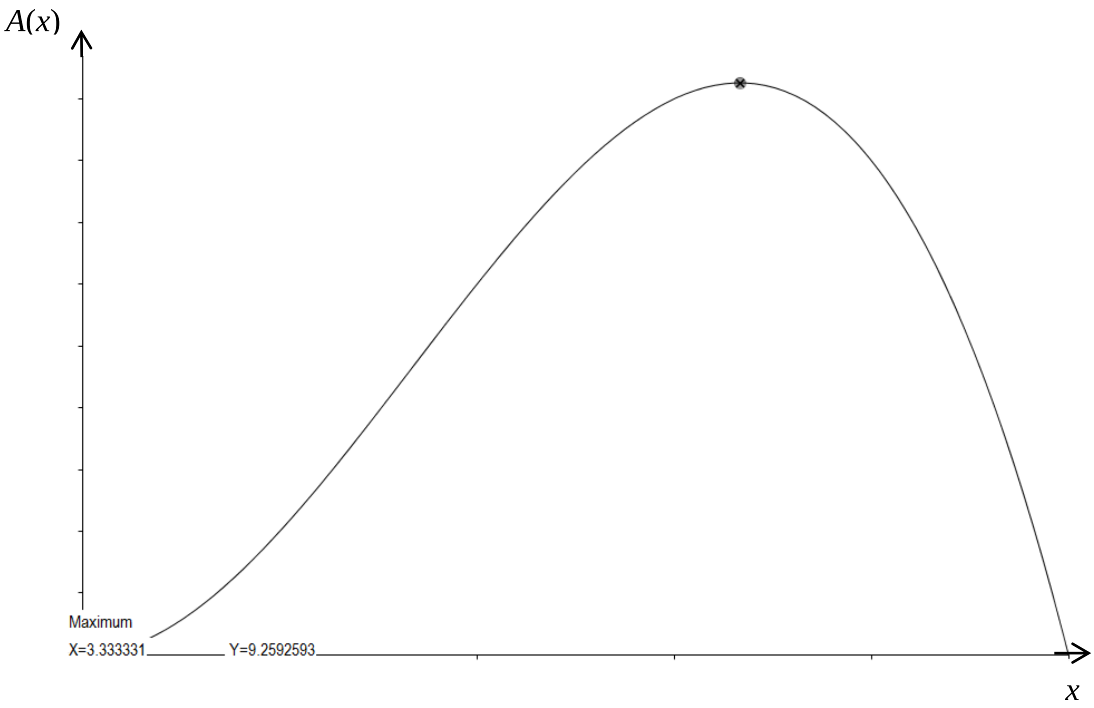


Figura 43: Representação gráfica da função *A*

Resposta: Para que a área do triângulo seja máxima, b = 3,3.

3. Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora, determina as dimensões do triângulo de modo a que a sua área seja 2.

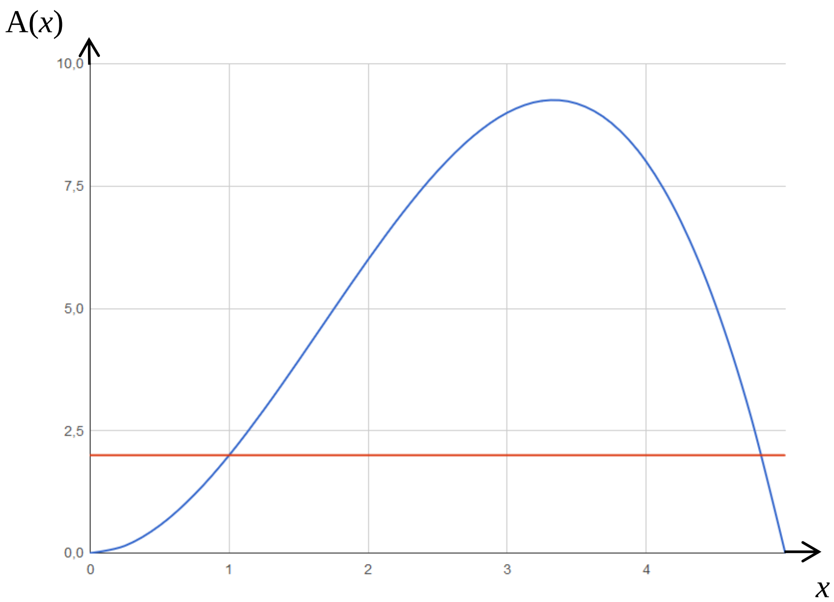


Figura 44: Representação gráfica da função *A* e de *Y = 2*

Pela calculadora vem: $b = 1 \ \vee b = 4{,}8$

Assim $f(1) = 5 \times 1 - 1^2 = 4$ e $f(4{,}8) = 5 \times 4{,}8 - 4{,}8 = 7{,}36$

Então as dimensões do triângulo para que a área seja 2 são:

$(b = 1 \ \wedge h = 4) \vee (b = 4{,}8 \wedge h = 7{,}36)$

Acontecimentos mais importantes

A aula iniciou-se com a escrita do sumário no quadro e houve uma breve explicação daquilo que ia ser ensinado.

Nesta aula, apenas recorri à calculadora gráfica como recurso tecnológico. No entanto, penso não ter sido suficiente, uma vez que os alunos tiveram bastante dificuldade em encontrar o máximo de funções, ou até pontos de interseção. Sugiro assim que, sempre que possível, o docente se faça acompanhar do *View Screen* ou de outro material equivalente para facilitar a aprendizagem dos alunos.

A maioria das dúvidas dos alunos foi assim em trabalhar com a calculadora gráfica, alguns deles não percebiam a diferença entre a janela de visualização e o domínio e contradomínio da função em estudo. No entanto, houve ainda outras dúvidas relevantes para a aula: Nas tarefas 1.1 e 3.2, surgiram dúvidas na representação dos extremos dos intervalos. Estas dúvidas advieram do facto dos alunos não estarem a tomar em consideração nem o contexto das tarefas nem as aproximações que eram pedidas nos enunciados das questões. Houve ainda uma outra dúvida que merece ser comentada. Aquando da resolução do exercício 2, um aluno menciona que "o comprimento de um retângulo é sempre maior que a largura". Provavelmente, esta dúvida aconteceu porque, desde muito cedo, é usual os docentes desenharem os retângulos numa posição horizontal, levando assim este aluno a concluir que o comprimento de um retângulo tem sempre de ser maior que a sua largura.

5. Análise e Discussão dos Dados

Neste capítulo serão apresentados e analisados os principais dados obtidos neste estudo, a partir das produções escritas dos alunos no último teste de avaliação do 2.º período e na ficha de trabalho realizada no dia 8 de maio de 2015.

Para facilitar a análise dos gráficos e tabelas, irão ser utilizadas as seguintes abreviaturas: (i) RC – Respostas corretas; (ii) RPC – Respostas parcialmente corretas; (iii) RE – Respostas erradas; (iv) TNR – Tarefas não respondidas; (v) Ni – Nível i ($0 \leq i \leq 6 \ \wedge i \in \mathbb{N}_0$); (vi) A$k$ – Aluno k ($1 \leq k \leq 25 \ \wedge k \in \mathbb{N}$).

5.1. Nível de pensamento algébrico da turma

Para estudar o nível de pensamento algébrico da turma participante no estudo, recorreu-se a uma ficha de trabalho e a um teste de avaliação de conhecimentos que a turma tinha realizado. Tendo em conta as suas respostas, foram selecionadas as de natureza algébrica, sendo depois analisadas de acordo com os níveis de pensamento algébrico propostos por Godino et al. (2012, 2014, 2015).

A Tabela 8 e a Figura 45 sintetizam o número de respostas, do teste e da ficha de trabalho, que os alunos deram nos diferentes níveis de pensamento algébrico.

Tabela 8: **Análise do número de respostas quanto ao nível de pensamento algébrico**

	N0	N1	N2	N3	N4	N5	N6	Total
Teste	28	82	75	14	9	0	0	208
Ficha de trabalho	12	18	19	3	19	6	0	77
Total	40	100	94	17	28	6	0	285

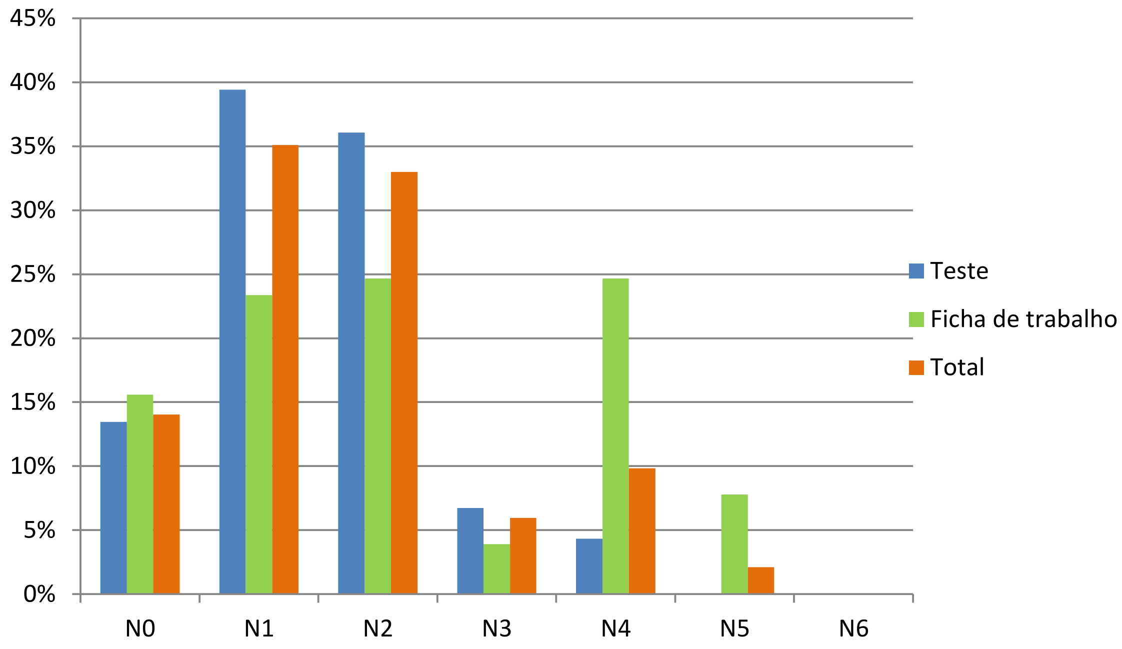


Figura 45: Nível de pensamento algébrico da turma

Com a ajuda da Figura 45, é possível verificar que a maioria das respostas da turma às tarefas propostas no teste de avaliação de conhecimentos e na ficha de trabalho (total) se encontram nos níveis 1 e 2 de pensamento algébrico. Do mesmo modo, observa-se que aproximadamente 14% das respostas estavam no nível 0, cerca de 6% das respostas no nível 3, no nível 4 encontravam-se aproximadamente 10% das respostas, e menos de 5% estavam no nível 5 de pensamento algébrico.

É possível observar também que, no teste de avaliação de conhecimentos, não foi construída qualquer resposta de nível superior a 4 e na ficha de trabalho não houve respostas de nível 6 de pensamento não algébrico.

Salienta-se ainda que no teste de avaliação, a maioria das respostas estavam nos níveis 1 e 2 de pensamento algébrico e na ficha de trabalho, a maioria das respostas se encontravam nos níveis 1, 2 e 4 de pensamento algébrico, havendo também algumas resoluções que se encontravam no nível 5. Para além disso, a percentagem de respostas de níveis 1, 2 e 3 diminuiu significativamente na ficha de trabalho em relação ao teste e a percentagem de respostas de níveis 4 e 5 aumentou consideravelmente na ficha de trabalho. Este facto poderá retratar uma melhoria no desenvolvimento de pensamento algébrico da turma, uma vez que a ficha de trabalho foi aplicada dois meses depois de recolher os primeiros dados.

De facto, Godino et al. (2015) referem que os primeiros quatro níveis de pensamento algébrico são mais ajustados para o Ensino Básico sendo os três seguintes mais adaptados para o Ensino Secundário. Assim, os dados recolhidos vão de encontro ao que estes autores defendem, uma vez que a turma participante no estudo está a iniciar-se no Ensino Secundário.

5.1.1. Respostas do teste

Analise-se de seguida as respostas dos alunos no teste de avaliação de conhecimentos quanto ao nível de pensamento algébrico em cada tarefa do teste.

Tabela 9: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 5.1**

N1
24

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 5.1:

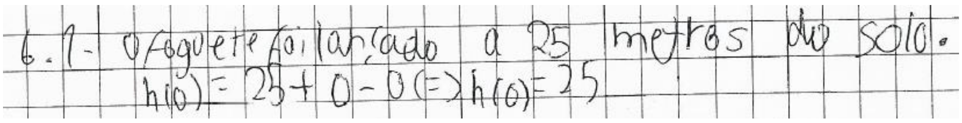


Figura 46: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 5.1

A linguagem que o aluno usou é natural, numérica e simbólica. O aluno trabalha com propriedades de operações aritméticas (elemento absorvente da multiplicação, propriedade da existência do elemento neutro da adição) e é uma tarefa de índole algébrica e operacional. Assim sendo, esta resolução enquadra-se no nível 1 de pensamento algébrico.

Tabela 10: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 5.2**

N0	N1
2	22

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 5.2:

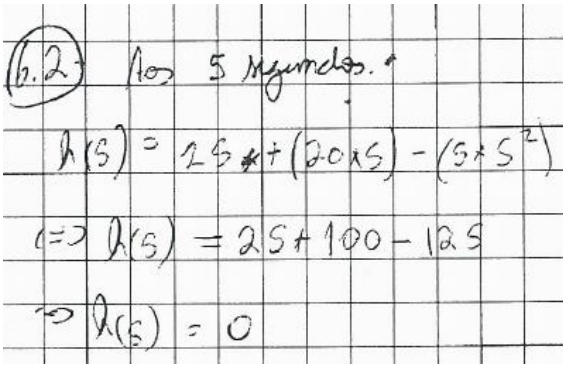


Figura 47: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 5.2

A resposta apresentada não inclui características algébricas, é de carácter numérico. Intervêm os objetos extensivos que são expressos através de uma linguagem natural e numérica. Aparece um símbolo que representa o valor desconhecido "$h(5)$", obtendo-se esse valor efetuando operações em objetos particulares. O aluno apenas verifica que 5 é solução da equação. Deste modo, a solução apresentada está no nível 0 de pensamento algébrico.

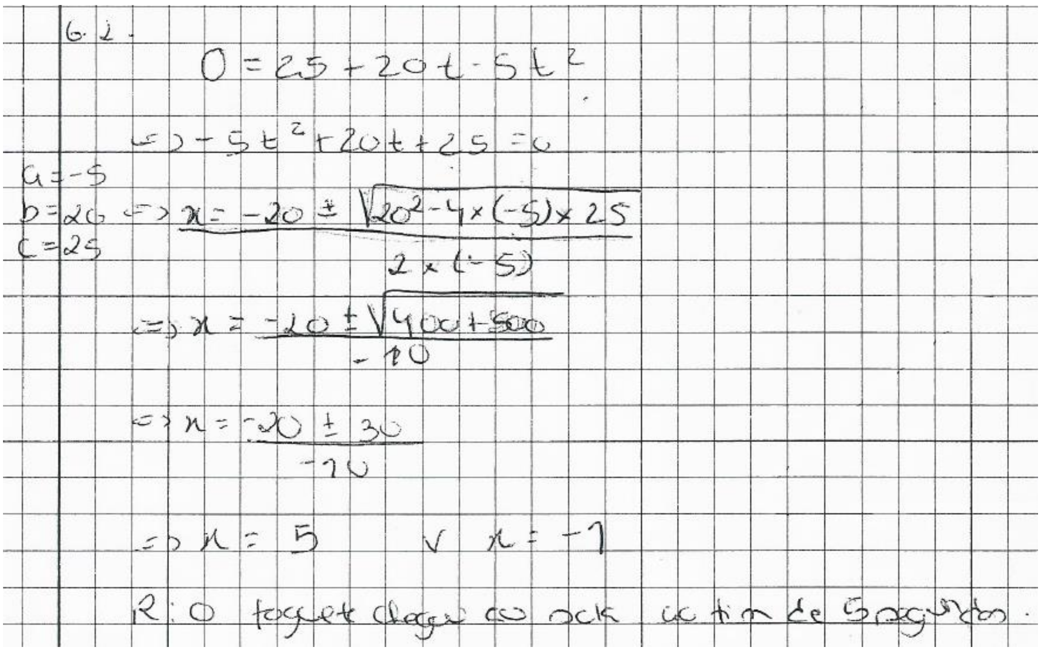


Figura 48: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 5.2

O aluno recorre à fórmula resolvente para determinar os zeros e, atendendo ao contexto do problema, exclui uma solução. A linguagem usada é numérica e natural e simbólica. É usado um símbolo para expressar o valor desconhecido (*x*). Assim, pode-se afirmar que esta resolução se encontra no nível 1 de pensamento algébrico.

Tabela 11: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 5.3**

N0	N1	N2
18	3	2

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 5.3:

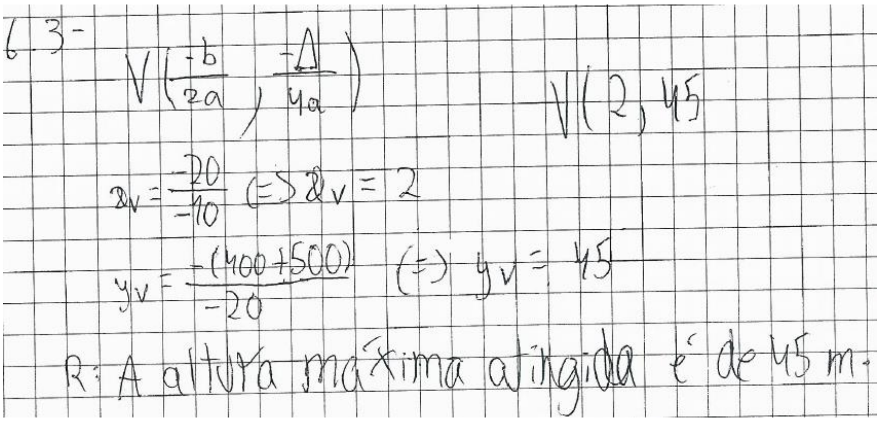


Figura 49: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 5.3

A resposta apresentada na Figura 49 não inclui características algébricas. O aluno apenas usou uma fórmula para encontrar o vértice da parábola. A solução apresentada é de carácter numérico e a linguagem é essencialmente numérica. Aparecem símbolos que representam o desconhecido, mas esses valores obtêm-se efetuando operações em objetos particulares. Deste modo, a resolução encontra-se no nível 0 de pensamento algébrico.

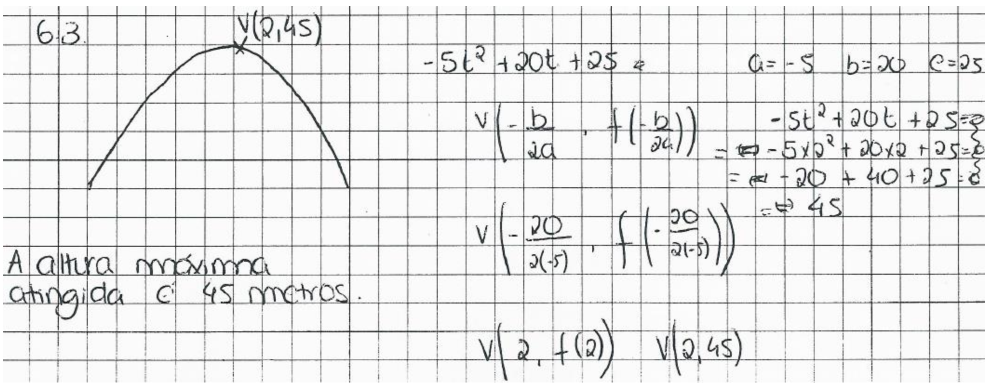


Figura 50: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 5.3

O aluno usou parcialmente a fórmula do vértice da parábola, entendendo que um ponto de uma função tem de coordenadas $(x, f(x))$, sendo que neste caso, f representa a parábola em estudo. Usou também o sinal de equivalência para representar igualdades e a linguagem da solução é essencialmente numérica, recorrendo também a uma imagem para se expressar. Por estes motivos, a resposta inclui-se no nível 1 de pensamento algébrico.

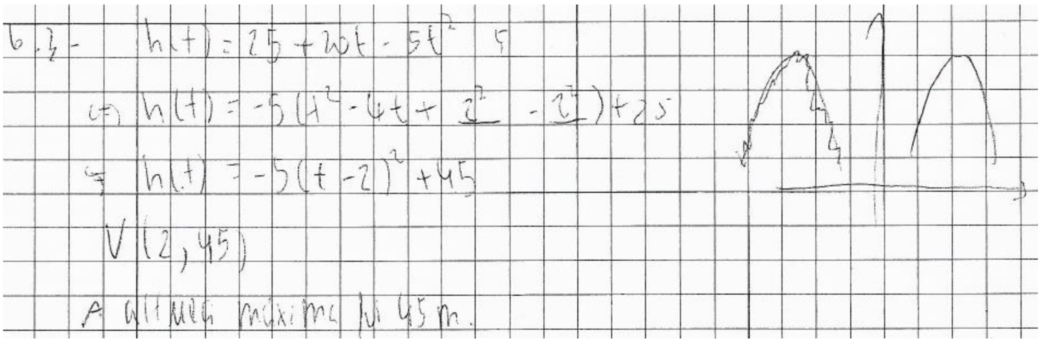


Figura 51: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 5.3

Nesta solução, o aluno manipulou a expressão de modo a conseguir escrevê-la na forma $y = a(x-h)^2 + k$, em que h e k são, respetivamente, a abcissa e a ordenada do vértice da parábola. A linguagem usada é simbólica, numérica e literal e a resolução é de natureza algébrica e funcional, sendo que a informação está relacionada com o contexto espacial. Assim sendo, a resolução da Figura 51 é um exemplo de uma resposta de nível 2 de pensamento algébrico.

Tabela 12: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 6.1**

N1	N3
1	5

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 6.1:

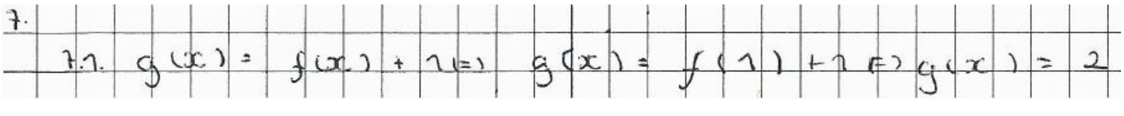


Figura 52: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 6.1

O aluno efetuou uma substituição, tentando assim chegar ao número de zeros que a função g tinha. Para isso, recorreu ao cálculo com objetos extensivos, aparecendo símbolos que se referem a objetos intensivos “$g(x)$” mas não se efetuaram operações com eles. Deste modo, observa-se que a resposta se encontra no nível 1 de pensamento algébrico.

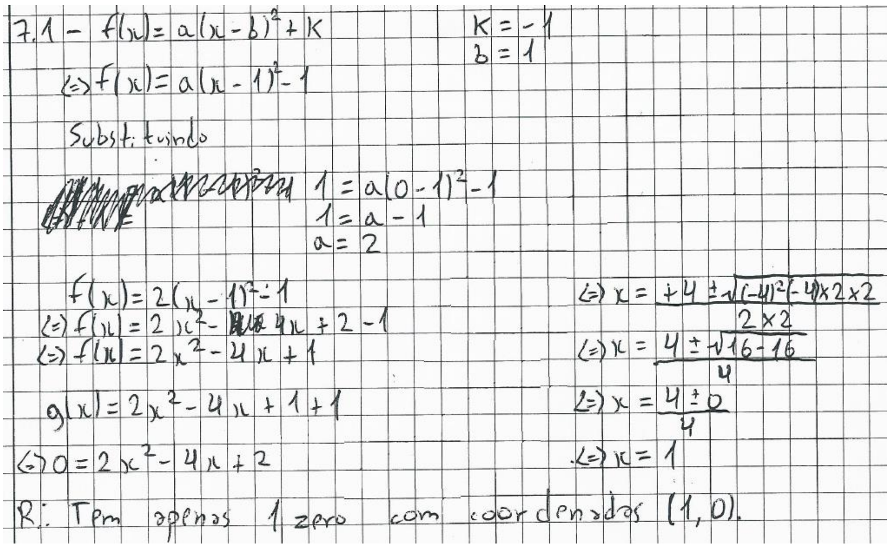


Figura 53: Exemplo de resposta de nível 3 de pensamento algébrico da tarefa 6.1

O aluno substituiu os valores de *h* e *k* e através de simplificações descobriu o valor de *a.* De seguida simplificou a expressão da função *f* e recorreu à fórmula resolvente para encontrar os zeros de *g.* A linguagem usada foi simbólica e literal, para além disso, as expressões sofrem transformações na forma simbólica, havendo conservação da equivalência. O aluno tratou também variáveis e incógnitas aplicando propriedades estruturais, como por exemplo a substituição. Por tudo o que foi mencionado, pode-se afirmar que a resolução da Figura 53 se encontra no nível 3 de pensamento algébrico.

Tabela 13: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 6.2**

N0	N1	N2	N3
1	1	3	4

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 6.2:

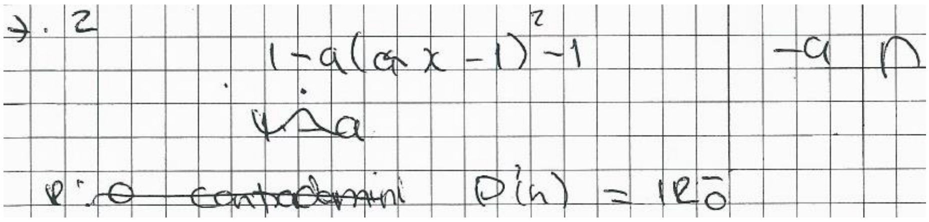


Figura 54: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 6.2

A resposta não inclui características algébricas. O aluno identifica que a concavidade da parábola é voltada para baixo e por isso assume que que o contradomínio de *h* são todos os números negativos incluindo o zero. A linguagem é simbólica e o aluno recorreu a uma imagem para se expressar. Assim, observa-se que esta resolução está no nível 0 de pensamento algébrico.

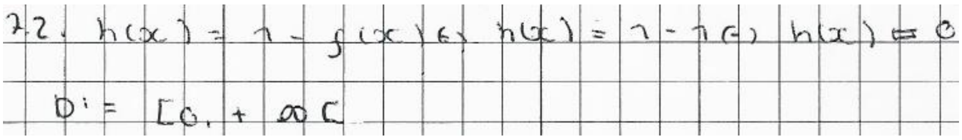


Figura 55: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 6.2

Como a tarefa é funcional e o aluno recorreu ao cálculo com objetos extensivos para tentar encontrar a solução pedida, pode-se afirmar que esta resolução é de nível 1.

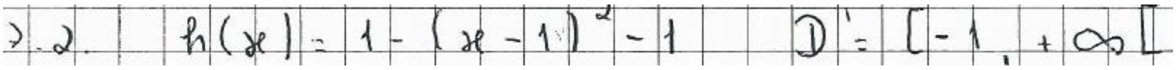


Figura 56: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 6.2

Na resolução apresentada na Figura 56 interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal que mencionam os objetos intensivos. É possível verificar também que o aluno não escreveu a função *h* na forma canónica, pelo que se conclui que esta resolução se encontra no nível 2 de pensamento algébrico.

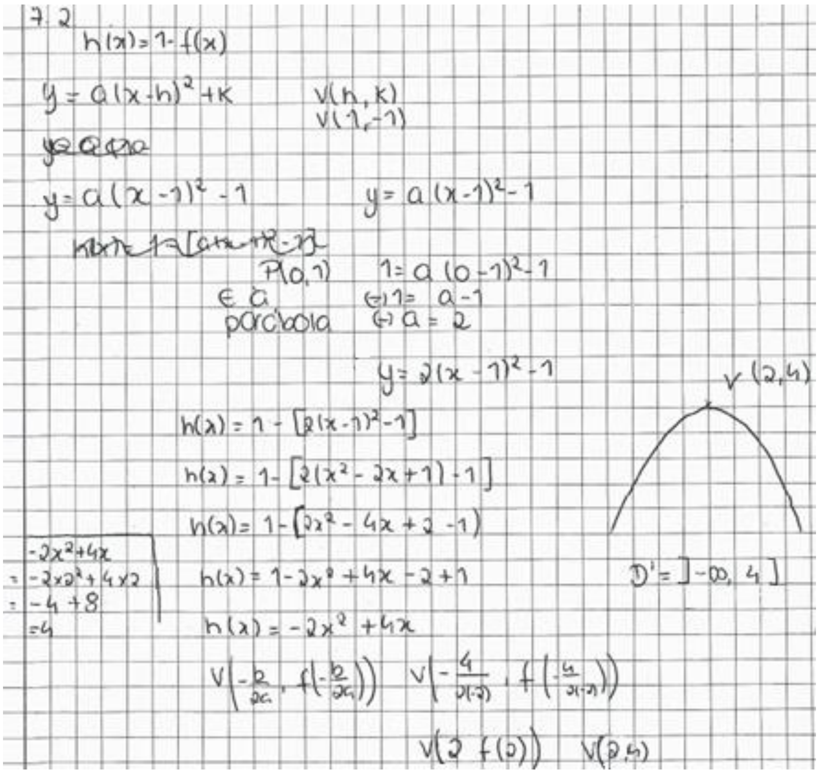


Figura 57: Exemplo de resposta de nível 3 de pensamento algébrico da tarefa 6.2

Na resposta que se apresenta na Figura 57, o aluno substituiu os valores de *h* e *k* e, através de simplificações, descobriu o valor de *a.* As expressões sofrem transformações na forma simbólica e são aplicadas propriedades estruturais, como por exemplo a substituição. A linguagem usada nesta resolução é simbólica e literal. Assim sendo, a resolução está no nível 3 de pensamento algébrico.

Tabela 14: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 6.3**

N2	N3	N4
1	4	9

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 6.3:

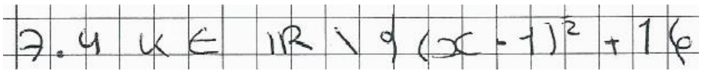


Figura 58: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 6.3

O aluno reconheceu uma generalidade, no entanto não obteve os valores de *k* na forma canónica. Para além disso, a linguagem usada é simbólica e literal, estando por isso esta resposta no nível 2 de pensamento algébrico.

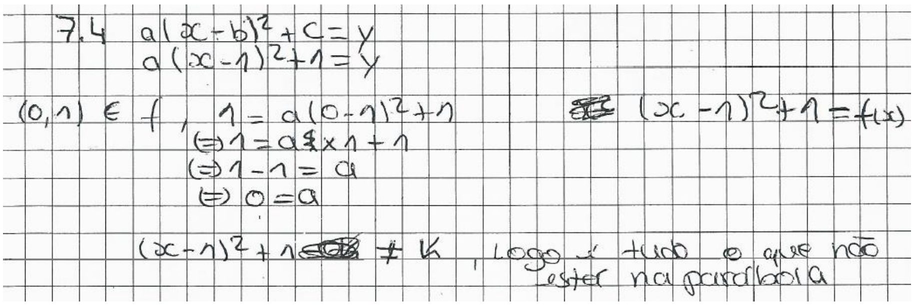
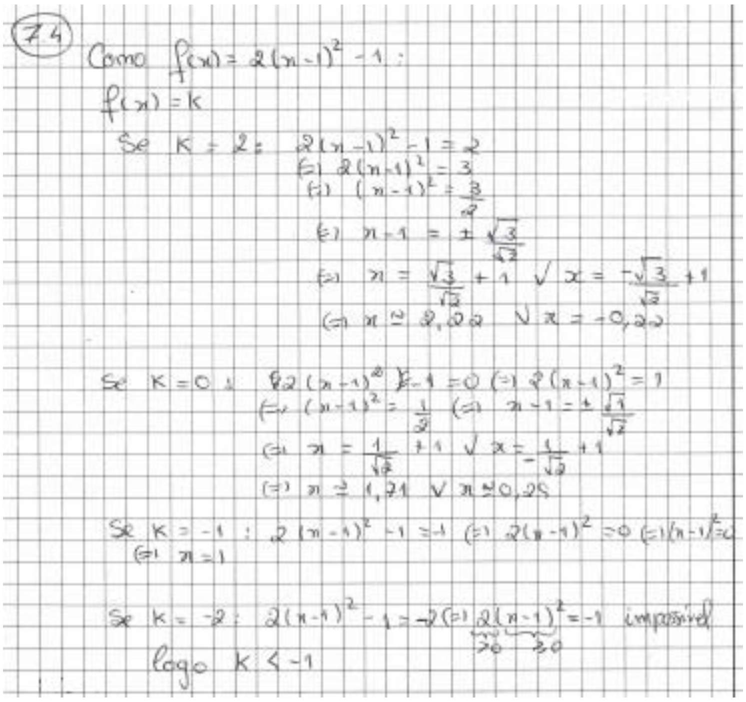


Figura 59: Exemplo de resposta de nível 3 de pensamento algébrico da tarefa 6.3

Na resolução da Figura 59, o aluno substituiu os valores de *h*, *k* e as coordenadas de um ponto da função *f*. Assim, através de simplificações, tentou descobrir o valor de *a* e a expressão da função *f*. Verifica-se que o aluno usou uma linguagem simbólica e literal. Assim pode-se afirmar que esta resolução se encontra no nível 3 de pensamento algébrico.



7.4

Como $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$:

$f(x) = k$

Se $k = 2$: $2(x-1)^2 - 1 = 2$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x-1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1 \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1$

$\Leftrightarrow x \simeq 2{,}22 \vee x = -0{,}22$

Se $k = 0$: $2(x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

$\Leftrightarrow x \simeq 1{,}71 \vee x \simeq 0{,}29$

Se $k = -1$: $2(x-1)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Se $k = -2$: $2(x-1)^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow \underbrace{2(x-1)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{< 0}$ impossível

logo $k < -1$

Figura 60: Exemplo de resposta de nível 4 de pensamento algébrico da tarefa 6.3

Para o aluno chegar à conclusão que $k < -1$, teve que fazer um estudo prévio do parâmetro k. Por este motivo, a solução encontra-se no nível 4 de pensamento algébrico.

Tabela 15: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 7.1**

N0	N1	N2
1	4	10

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 7.1:

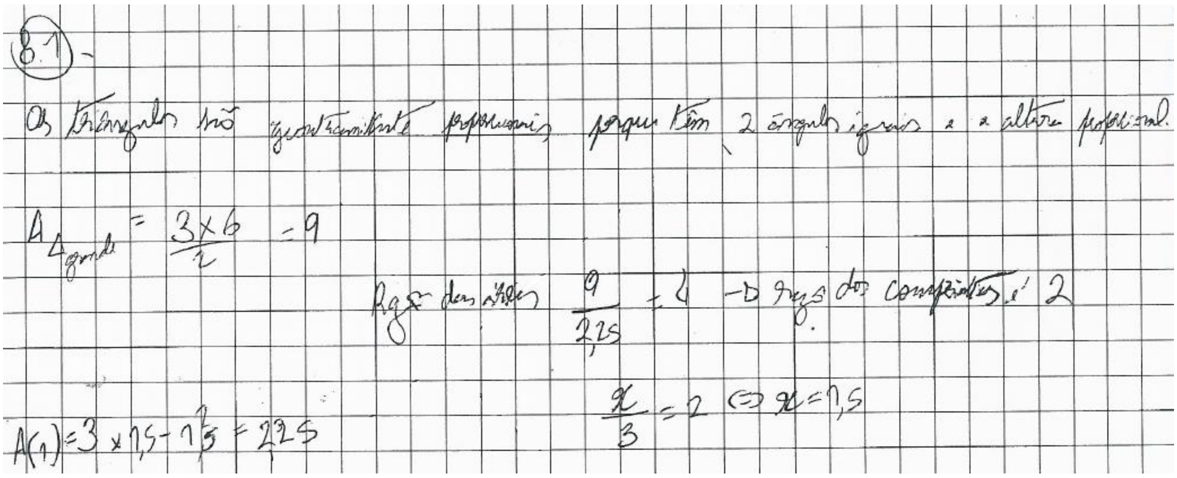


Figura 61: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 7.1

O aluno expressou-se segundo uma linguagem natural e numérica. Representou por *x* um valor que ele desconhecia e calculou-o efetuando operações em objetos particulares. Deste modo, a resposta não inclui características algébricas, concluindo-se assim que esta resolução pressupõe um nível 0 de pensamento algébrico.

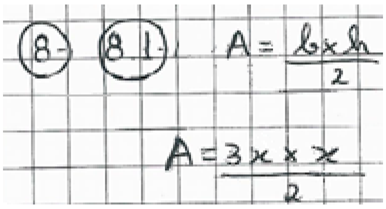


Figura 62: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 7.1

O aluno identifica que uma das alturas do triângulo é *x* e presumiu que a outra altura tomava o valor *3x*. Assim, apenas efetuou uma substituição, não simplificando a expressão, possivelmente porque se apercebeu que o seu resultado estava errado. A resposta encontra-se no nível 1 de pensamento algébrico.

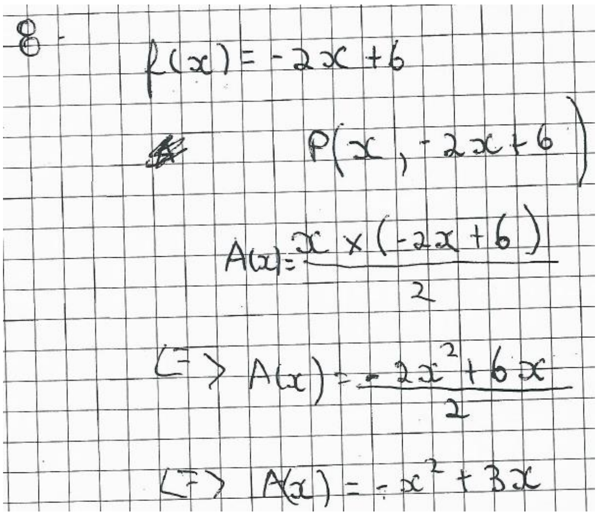


Figura 63: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 7.1

Nesta resolução, interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal, para além disso, a equação é da forma $Ax \pm B = C$, sendo que o aluno a manipulou devidamente. A resposta encontra-se portanto no nível 2 de pensamento algébrico.

Tabela 16: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 7.2**

N0	N1	N2
2	5	17

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 7.2:

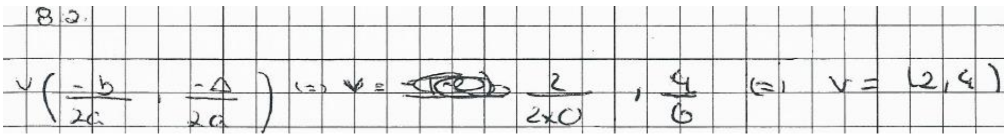


Figura 64: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa7.2

A resposta não inclui características algébricas, intervêm objetos extensivos que são expressos através de uma linguagem natural e numérica. Deste modo, a resolução enquadra-se no nível 0 de pensamento algébrico.

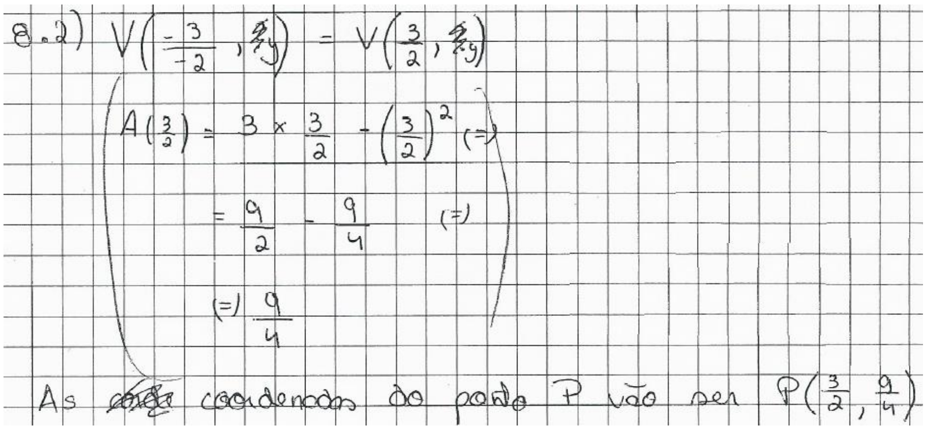


Figura 65: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 7.2

O aluno calculou a abcissa que maximizava a área, no entanto fez a substituição na função *A* em vez de fazer na função *f*. Identifica que pretende calcular a ordenada do vértice da função *A*, usando a simbologia correta. A linguagem usada foi essencialmente numérica e por estes motivos, a resolução apresentada na Figura 65 é de nível 1 de pensamento algébrico.

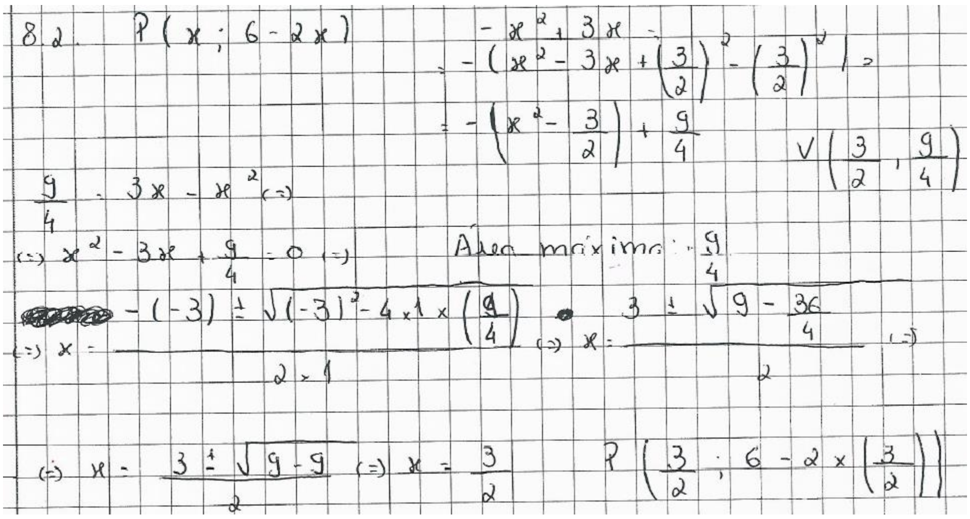


Figura 66: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 7.2

O aluno manipulou numericamente a expressão da função *A* de modo a obter as coordenadas do vértice de $A(x)$. A resposta apresentada é de carácter algébrico-operacional, interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. Também é possível verificar que o aluno não efetuou os cálculos quando apresentou as coordenadas de P, não estando por isso na forma mais reduzida. Deste modo, a resolução da Figura 66 é um exemplo de uma resposta de nível 2 de pensamento algébrico.

Tabela 17: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 7.3**

N2
22

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 7.3:

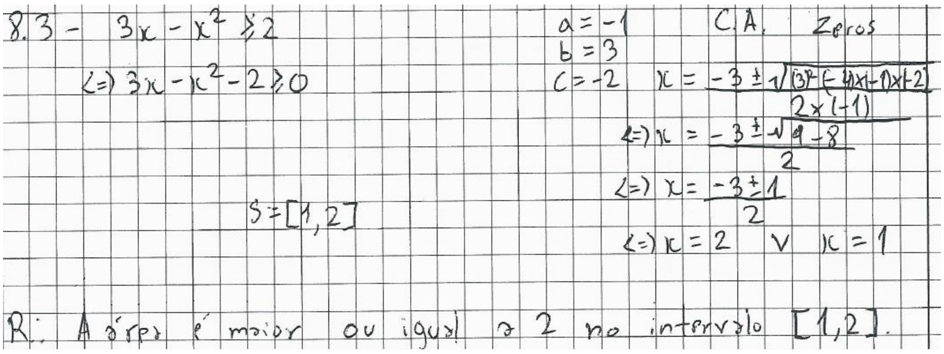


Figura 67: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 7.3

O aluno resolveu uma inequação em que a incógnita está apenas num dos membros. Para isso recorreu à fórmula resolvente para calcular os zeros da parábola definida por: $-x^2 + 3x - 2$. A linguagem usada é simbólica e literal, estando esta resposta no nível 2 de pensamento algébrico.

Tabela 18: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 8.1**

N1	N2	N3
2	20	1

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 8.1:

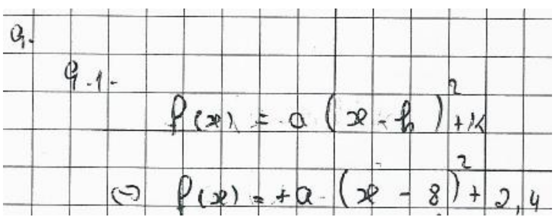


Figura 68: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 8.1

A linguagem usada na Figura 68 é essencialmente numérica uma vez que o aluno apenas substituiu valores numa expressão que permite identificar o vértice da parábola. Aparece um símbolo que representa um valor desconhecido (a) mas não se efetuam operações com ele. Por estes motivos, verifica-se que a resolução apresentada pertence ao nível 1 de pensamento algébrico.

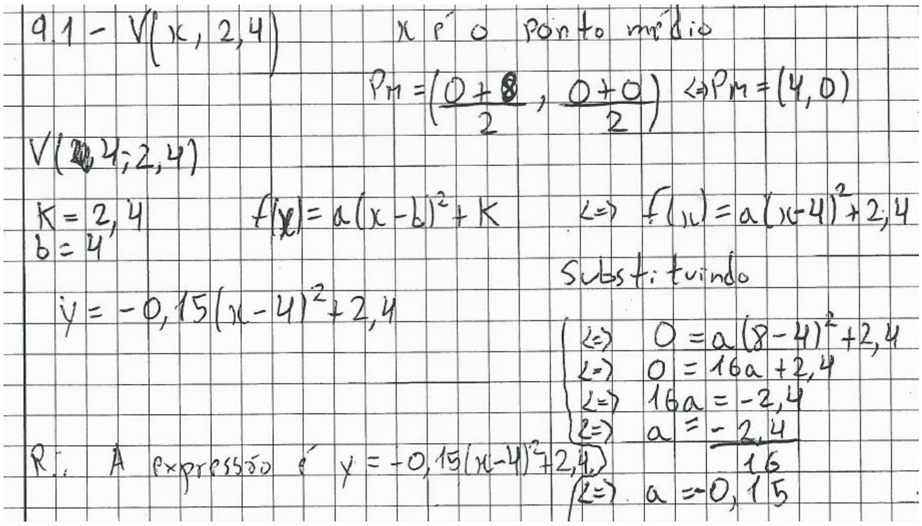


Figura 69: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 8.1

Para calcular o valor da abcissa do vértice, o aluno recorreu ao cálculo do ponto médio entre os zeros da curva. De seguida, substituiu os valores de h e k na expressão da parábola. Depois, substituindo o ponto de coordenadas $(0, 8)$ na expressão de *f*(*x*) e através de simplificações, descobriu o valor de a, resolvendo assim uma equação do tipo: $Ax \pm B = C$. A solução apresentada é de carácter algébrico e operacional numa modelação da função quadrática, estando enquadrada no nível 2 de pensamento algébrico.

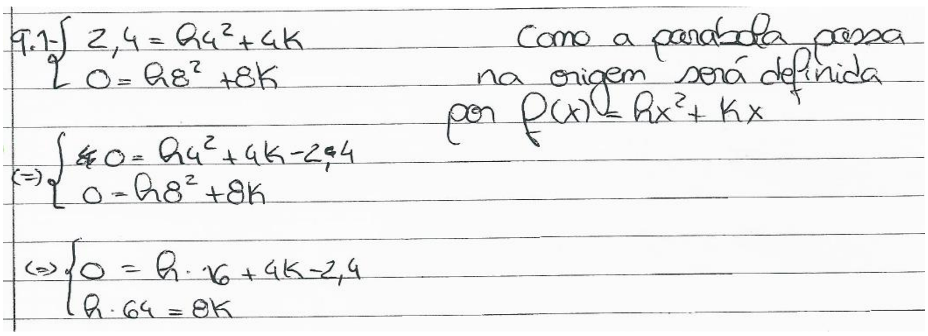


Figura 70: Exemplo de resposta de nível 3 de pensamento algébrico da tarefa 8.1

Na solução apresentada na Figura 70, o aluno reparou que a parábola passa na origem e por isso é da forma $f(x) = ax^2 + bx$. Apesar do aluno ter formulado bem a questão e ter manipulado algebricamente o sistema de duas incógnitas, não acabou por o resolver, apresentando também um erro na resolução do sistema. A linguagem usada é simbólica e literal. Deste modo, a resolução do aluno encontra-se no nível 3 de pensamento algébrico.

Tabela 19: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 8.2**

N0	N1
4	20

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 8.2:

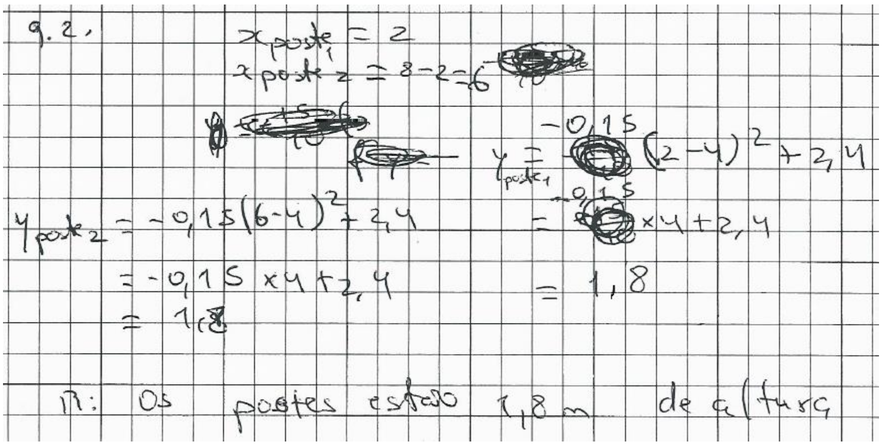


Figura 71: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 8.2

Na resolução apresentada na Figura 71, o aluno calcula $f(2)$ e $f(6)$, não demonstrando assim que sabe que as alturas dos postes teriam que ser iguais. A linguagem é natural e numérica, aparecem símbolos que representam o desconhecido, mas esse valor obtém-se efetuando operações em objetos particulares, sendo assim, esta resposta está no nível 0 de pensamento algébrico.

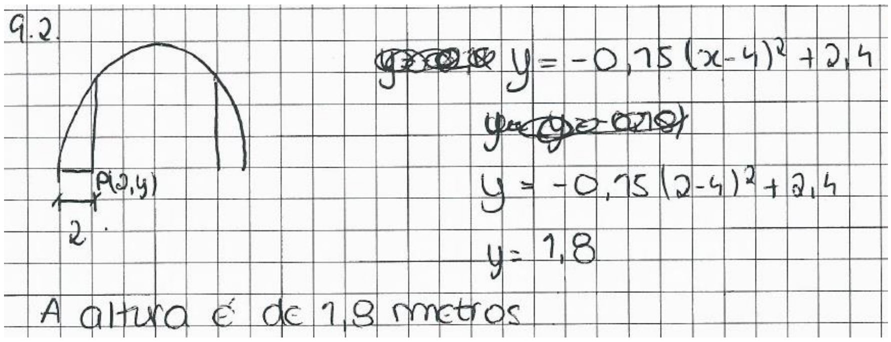


Figura 72: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 8.2

A solução apresentada é essencialmente de caráter numérico e o aluno sentiu necessidade de recorrer a uma imagem para o seu raciocínio. A altura dos postes (valor desconhecido) é representada por um símbolo (y). Deste modo, a resolução pertence ao nível 1 de pensamento algébrico.

5.1.2. Respostas da ficha de trabalho

Analise-se de seguida as respostas dos alunos na ficha de trabalho implementada quanto ao nível de pensamento algébrico em cada tarefa do teste.

Tabela 20: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 1**

N0	N1	N2	N3
10	11	1	2

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 1:

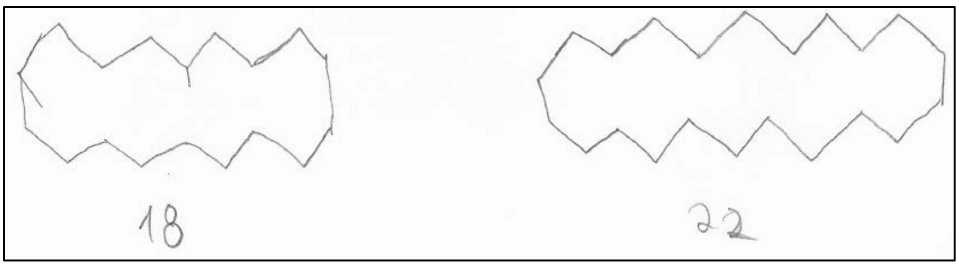


Figura 73: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 1

O aluno apenas desenhou a quarta e quinta figura da sequência, contando um por um os segmentos necessários para construir as respetivas figuras, deste modo a resposta não inclui características algébricas, estando assim no nível 0 de pensamento algébrico.

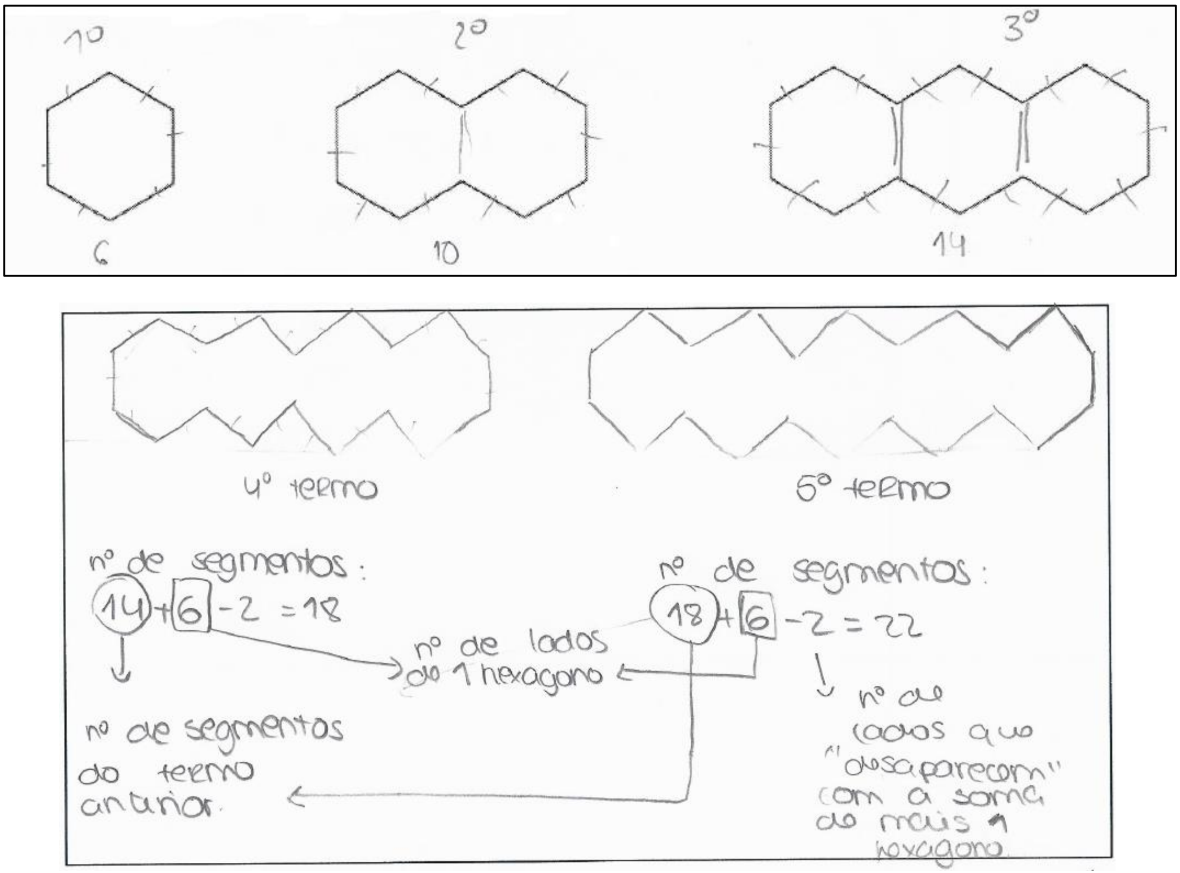


Figura 74: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 1

Nesta resposta intervêm os objetos intensivos cuja generalidade aparece de uma forma explícita perante uma linguagem natural e numérica. O aluno identifica um padrão, no entanto não o escreve na sua forma geral. Assim sendo, a resolução está no nível 1 de pensamento algébrico.

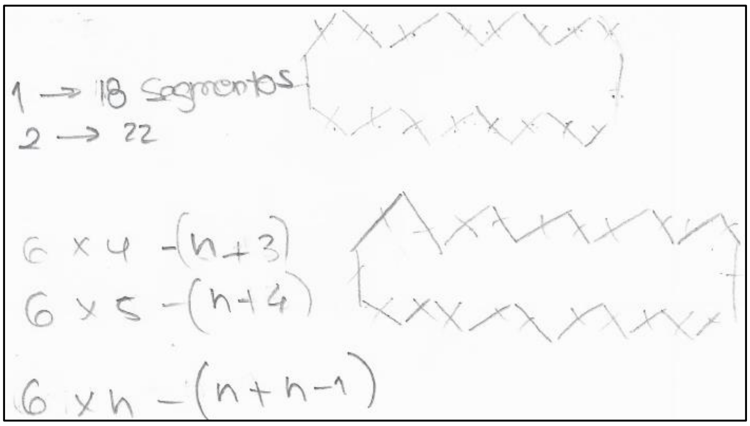


Figura 75: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 1

Na Figura 75, observa-se a resposta de um aluno que identifica um padrão, reconhece a sua forma geral, no entanto não operou com as variáveis para obter a forma canónica da expressão. Deste modo, a resposta está no nível 2 de pensamento algébrico.

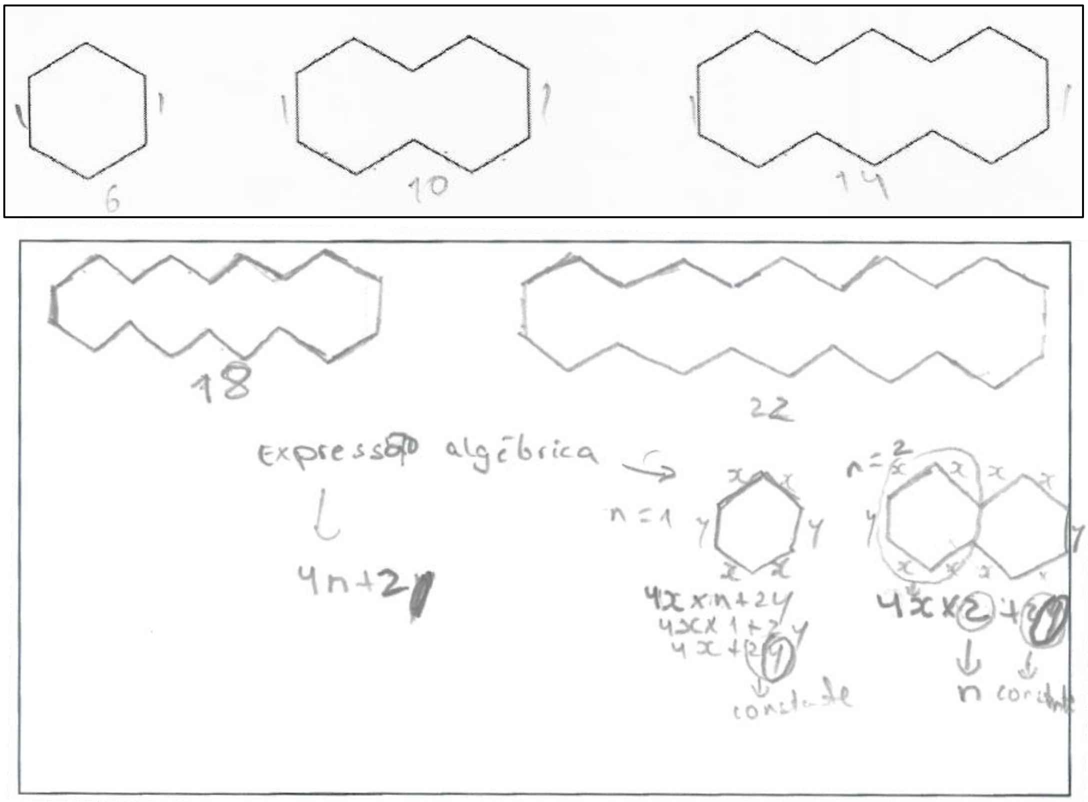


Figura 76: Exemplo de resposta de nível 3 de pensamento algébrico da tarefa 1

Na resposta apresentada na Figura 76, o aluno operou com variáveis para obter a forma canónica da expressão geral, para além disso, é possível verificar que se formam objetos intensivos que são apresentados de maneira simbólica e literal, efetuando operações analíticas com eles. Assim sendo, a resolução encontra-se no nível 3 de pensamento algébrico.

Tabela 21: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 2**

N0	N1	N2	N3
1	5	16	1

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 2:

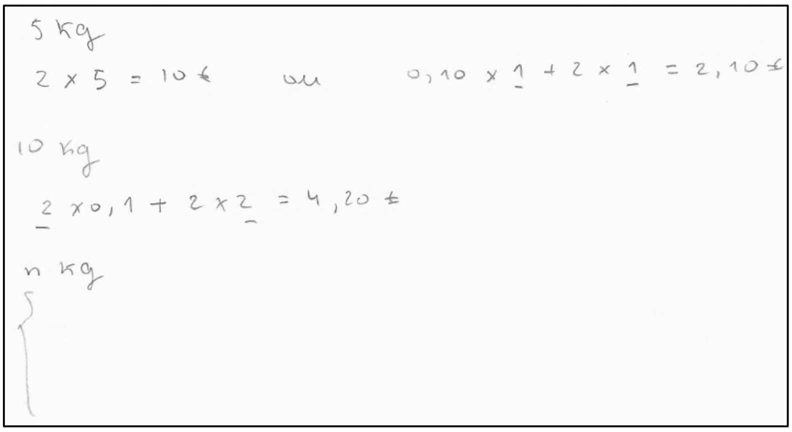


Figura 77: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 2

O aluno não apresenta características algébricas na sua resposta. Apresenta dois preços possíveis para o cliente que compre 5*kg* de peras e um preço possível para o cliente que compre 10 *kg* de peras, sendo que o aluno apenas efetua operações em objetos particulares. O aluno não encontra uma expressão que generalize o custo de *n kg* de peras, pelo que a resposta se encontra no nível 0 de pensamento algébrico.

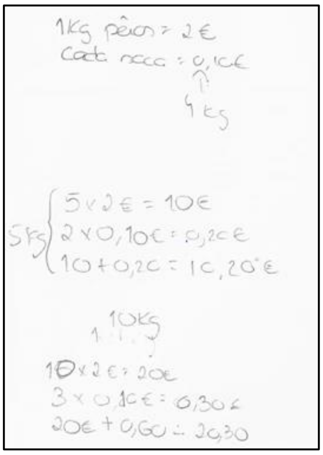
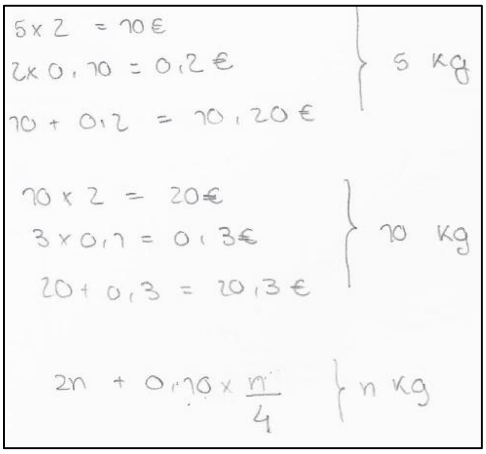


Figura 78: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 2

Verifica-se que o aluno calculou o custo de 5*kg* e 10*kg* de peras, não encontrando nenhuma regra que generalize o modelo matemático. No entanto, uma vez que a generalidade aparece de uma forma explícita perante uma linguagem numérica e simbólica, a resposta encontra-se no nível 1 de pensamento algébrico.



$5 \times 2 = 10$ €

$2 \times 0,10 = 0,2$ €   } 5 kg

$10 + 0,2 = 10,20$ €

$10 \times 2 = 20$ €

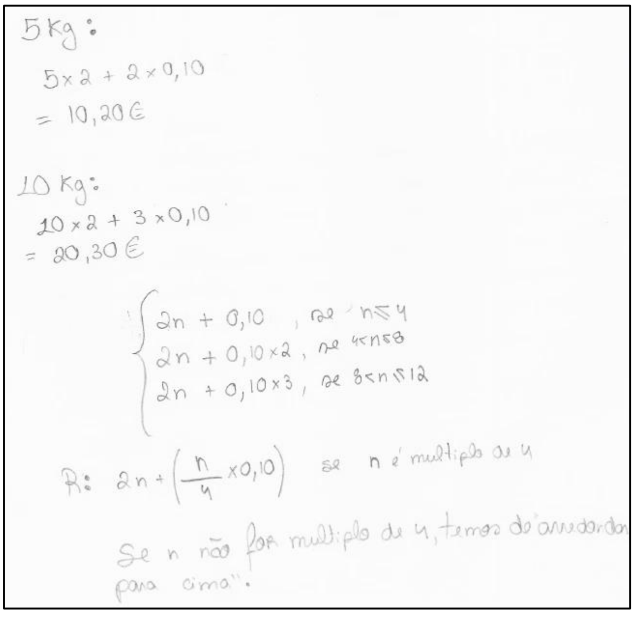
$3 \times 0,1 = 0,3$ €   } 10 kg

$20 + 0,3 = 20,3$ €

$2n + 0,10 \times \frac{n}{4}$ } n kg

Figura 79: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 2

Na Figura 79 é possível observar uma resposta que se enquadra no nível 2 de pensamento algébrico, pois o aluno apresenta uma regra geral do custo de *n kg* de peras, no entanto esta não se encontra na forma canónica. Para além disso, interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal que mencionam os objetos intensivos.



5 kg:

$5 \times 2 + 2 \times 0,10$

$= 10,20$ €

10 kg:

$10 \times 2 + 3 \times 0,10$

$= 20,30$ €

$$\begin{cases} 2n + 0,10, & \text{se } n \leq 4 \\ 2n + 0,10 \times 2, & \text{se } 4 < n \leq 8 \\ 2n + 0,10 \times 3, & \text{se } 8 < n \leq 12 \end{cases}$$

R: $2n + \left(\frac{n}{4} \times 0,10\right)$ se n é múltiplo de 4

Se n não for múltiplo de 4, temos de "arredondar para cima".

Figura 80: Exemplo de resposta de nível 3 de pensamento algébrico da tarefa 2

Na resolução apresentada na Figura 80, o aluno apresenta uma regra que generaliza o custo de *n kg* de peras, sendo que esta generalização é apresentada de forma simbólica e literal. O aluno trabalhou com a função definida por ramos e de seguida, quando o aluno menciona "arredondar para cima" quando *n* não é múltiplo de 4, está a reconhecer a função parte inteira. Por este motivo, a resposta enquadra-se no nível 3 de pensamento algébrico.

Tabela 22: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 3**

N0	N1	N4
1	1	19

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 3:

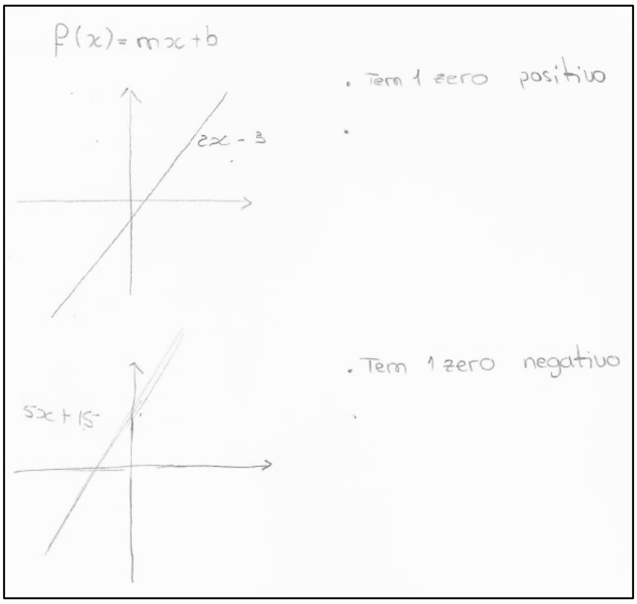


Figura 81: Exemplo de resposta de nível 0 de pensamento algébrico da tarefa 3

Nesta resposta, o aluno não reconhece a generalidade. Apenas estuda, quanto à existência de zeros, duas funções que fazem parte da família das funções lineares. Intervêm apenas objetos extensivos que são expressos através de uma linguagem natural, numérica e que recorre a imagens. Por tudo o que foi mencionado, a resolução enquadra-se no nível 0 de pensamento algébrico.

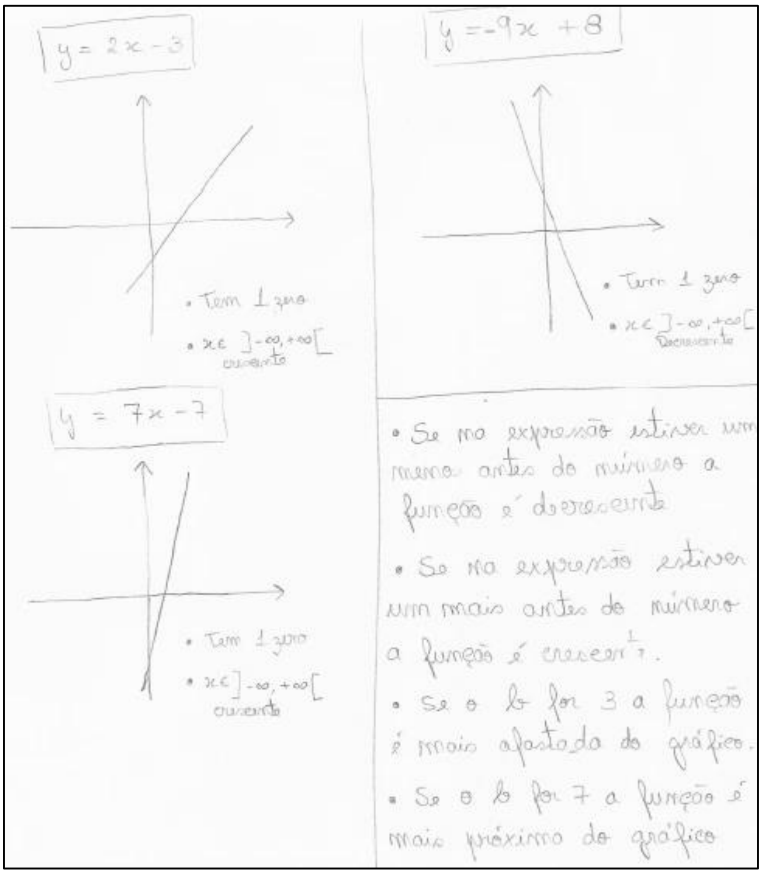


Figura 82: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 3

O aluno estuda a monotonia e a existência de zeros para casos particulares da função afim. A generalidade aparece de forma explícita (mas incompleta) no estudo da monotonia da função. O estudante expressou-se segundo uma linguagem natural, simbólica e recorreu a imagens. Assim sendo, a resposta enquadra-se no nível 1 de pensamento algébrico.

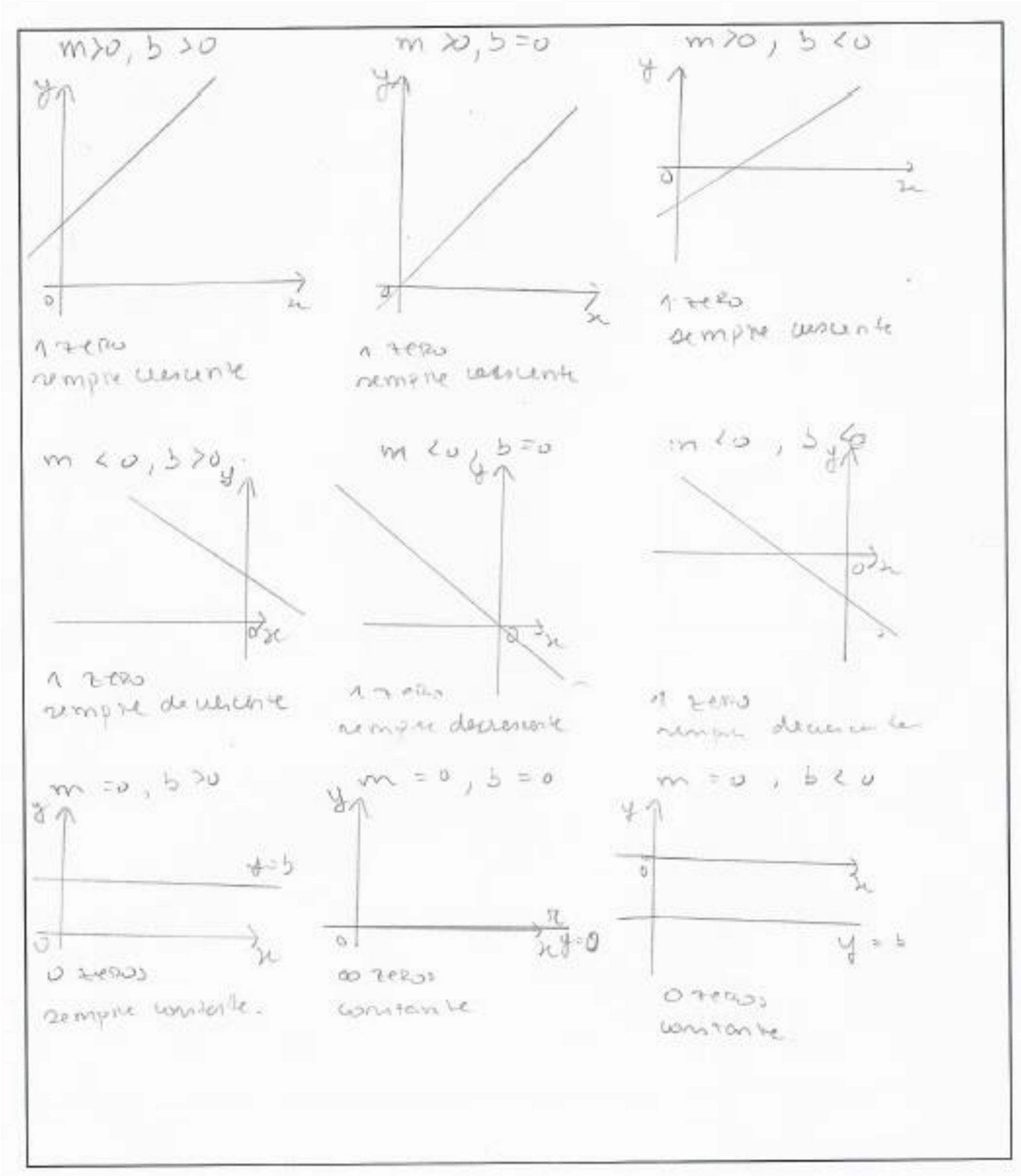


Figura 83: Exemplo de resposta de nível 4 de pensamento algébrico da tarefa 3

Nesta resolução é possível verificar que o aluno fez um estudo completo de parâmetros para estudar a família das funções lineares. Para isso, recorreu a imagens que representam os parâmetros em estudo. Por estes motivos, esta resolução encontra-se no nível 4 de pensamento algébrico.

Tabela 23: **Nível de pensamento algébrico das respostas da tarefa 4**

N1	N2	N5
1	2	6

Apresentam-se de seguida exemplos de resoluções dos alunos à tarefa 4:

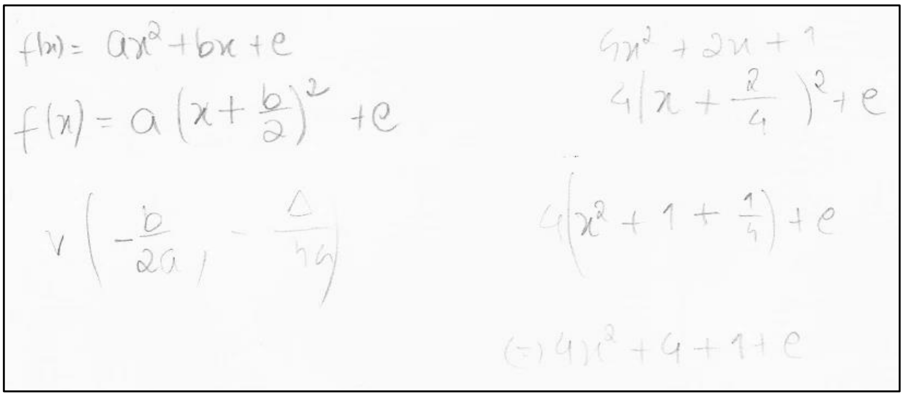


Figura 84: Exemplo de resposta de nível 1 de pensamento algébrico da tarefa 4

A linguagem usada nesta resolução é literal, numérica e simbólica. O aluno recorreu ao cálculo com objetos extensivos para tentar manipular corretamente a expressão dada no enunciado, atribuindo deste modo um valor a *a*, *b* e *c*. Por estes motivos, a resposta está no nível 1 de pensamento algébrico.

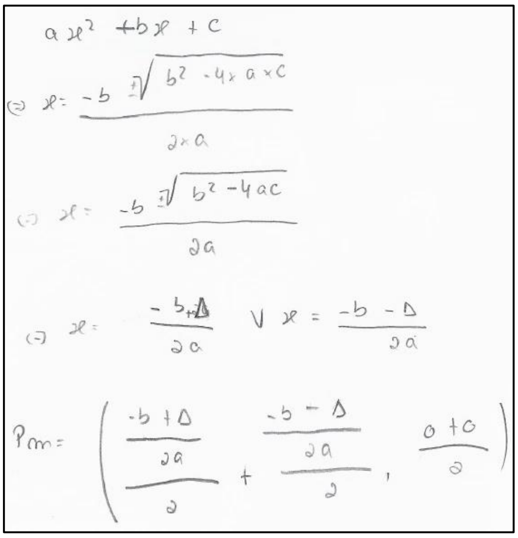


Figura 85: Exemplo de resposta de nível 2 de pensamento algébrico da tarefa 4

Na resolução da Figura 85 é possível verificar que interferem variáveis que são expressas numa linguagem simbólica e literal. O aluno reconheceu que a abcissa do vértice é obtida calculando o ponto médio entre os zeros da parábola, no entanto não obteve as coordenadas do referido ponto na forma canónica. Por estes motivos, a resolução enquadra-se no nível 2 de pensamento algébrico.

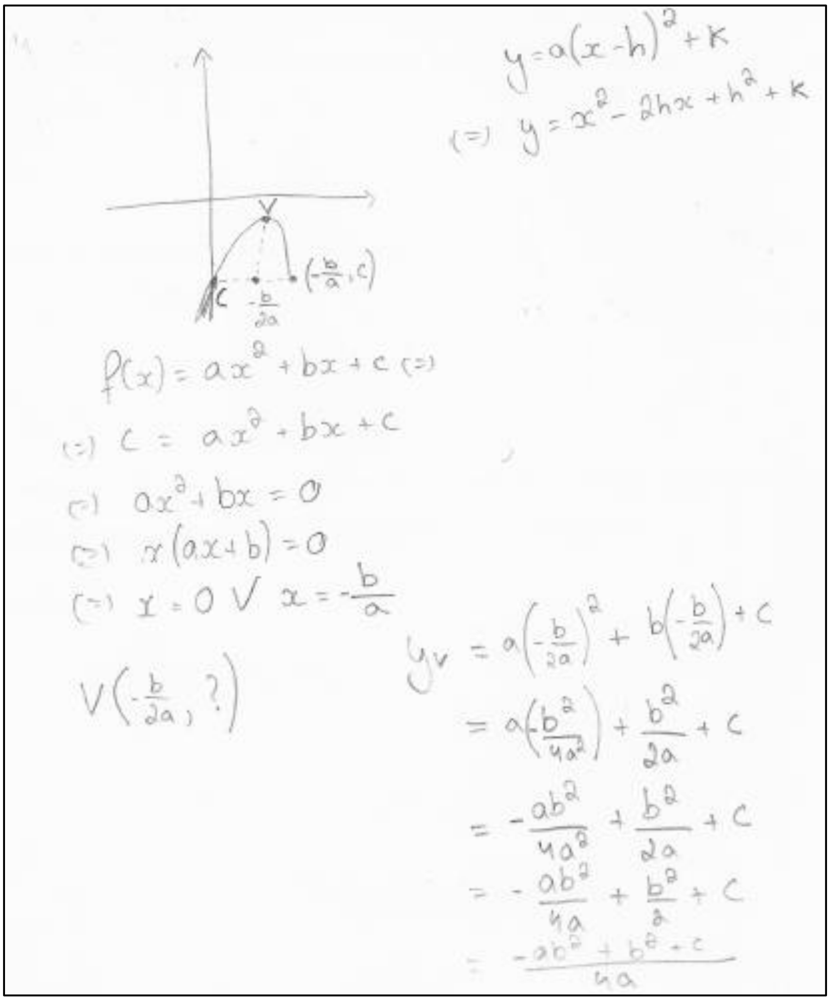


Figura 86: Exemplo de resposta de nível 5 de pensamento algébrico da tarefa 4

O aluno demonstrou que a abcissa do vértice da parábola é dada por:

$$-\frac{b}{2a}$$

De seguida, recorrendo a uma substituição, tentou provar que a ordenada do vértice da parábola é dada por:

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

O aluno mostrou capacidade em conseguir manipular analiticamente os parâmetros a, b e c, sendo que, por este motivo, a resolução se enquadra no nível 5 de pensamento algébrico.

5.2. Nível de pensamento algébrico dos participantes

Através das resoluções dos alunos (às tarefas propostas no último teste de avaliação do 2.º período e da ficha de trabalho implementada), que foi possível avaliar o respetivo nível de pensamento algébrico, construiu-se um gráfico de barras que se apresenta na Figura 95 (ver anexo IV).

Com a ajuda da referida figura, é possível observar que a maioria dos inquiridos tem um pensamento algébrico de nível 0 ou 1. No entanto, verifica-se também uma grande afluência para os níveis 2 e 3. Não obstante os níveis 4 e 5 de pensamento algébrico são os que menos vezes se encontram nas resoluções dos alunos, sendo que em alguns casos, os estudantes nunca chegaram a trabalhar algebricamente nestes dois níveis, como é o caso dos alunos A9, A16 e A21.

Para além disso, observa-se também que nenhuma das resoluções dos participantes é de nível 6.

5.3. Respostas corretas, parcialmente corretas, erradas e tarefas não respondidas

Neste subcapítulo ir-se-ão analisar o número de respostas corretas, parcialmente corretas, erradas e de tarefas não respondidas do teste de avaliação analisado e da ficha de trabalho implementada.

Tabela 24: **Número de RC, RPC, RE e TNR do teste**

Tarefas	RC	RPC	RE	TNR
1	25	0	0	0
2	13	0	12	0
3	14	0	11	0
4	17	0	8	0
5.1	25	0	0	0
5.2	19	3	3	0
5.3	17	5	1	2
6.1	15	5	5	0
6.2	2	3	19	1
6.3	8	1	14	2
7.1	16	3	6	0
7.2	11	8	5	1
7.3	9	10	3	3
8.1	12	10	1	2
8.2	16	7	1	1
Total	**219**	**55**	**89**	**12**

Pela análise da Tabela 24, observa-se que em quase todas as tarefas as respostas foram maioritariamente corretas, à exceção das tarefas 6.2 e 6.3, em que se nota que uma grande parte dos alunos errou a resposta. Também na tarefa 7.3 se observa que a maioria das resoluções não está totalmente correta. A Figura 87 sintetiza os resultados da Tabela 24.

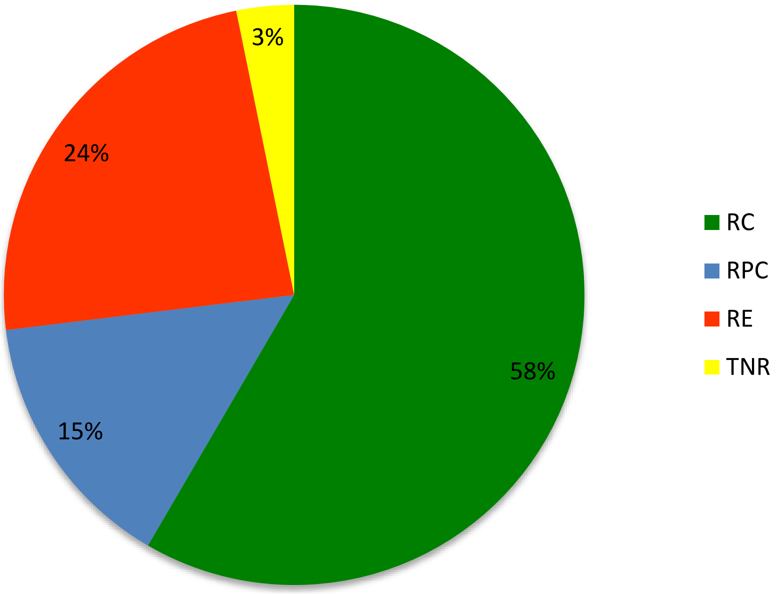


Figura 87: Representação gráfica do número de respostas do teste

Analisando a Figura 87, verifica-se que mais de metade das respostas dos alunos no último teste de avaliação de conhecimentos do 2.º período estavam totalmente corretas. Não obstante, verifica-se também que 24% das resoluções estavam totalmente erradas e apenas 3% das tarefas não foram respondidas pelos 25 alunos, sendo que as respostas parcialmente corretas representam uma fatia de 15% do gráfico.

Tabela 25: Número de RC, RPC, RE e TNR da ficha de trabalho

Tarefas	RC	RPC	RE	TNR
1	16	4	4	0
2	1	20	2	1
3	4	15	2	3
4	0	5	4	15
Total	**21**	**44**	**12**	**19**

Pela análise da Tabela 25, verifica-se que apenas na primeira tarefa o número de RC foi superior ao número de RPC, RE e TNR, aponta-se também o facto da tarefa 1 ser a única que possui zero respostas em branco. Do mesmo modo, verifica-se também que nas tarefas 2 e 3 o número de RPC é bastante superior ao número de RC, RE e TNR. Do mesmo modo, verifica-se que a última tarefa foi a que menos vezes foi respondida, sendo que um total de 15 alunos não respondeu à tarefa, para além disso, é possível observar também que nenhum aluno respondeu de forma totalmente correta a esta última tarefa.

A Figura 88 sintetiza os dados da Tabela 25.

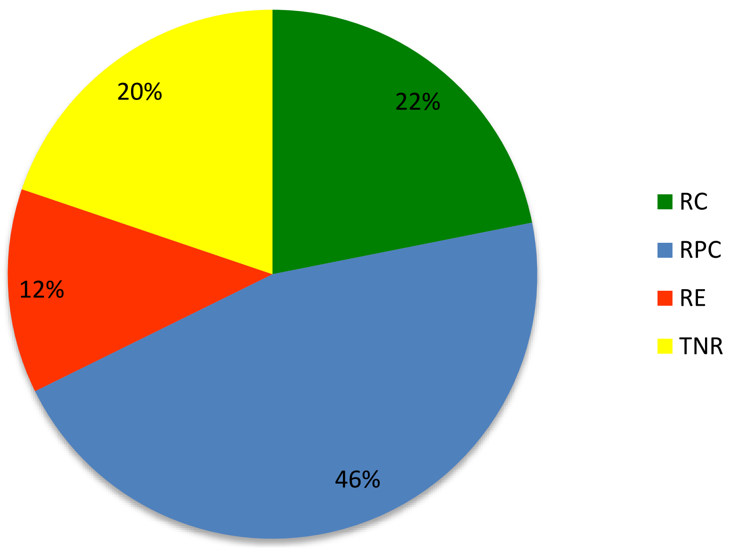


Figura 88: Representação gráfica da percentagem do tipo de respostas da ficha de trabalho

Analisando a Figura 88, verifica-se que a maioria das respostas dos alunos à ficha de trabalho estavam parcialmente corretas, sendo que apenas 22% das respostas estavam totalmente corretas. Do mesmo modo, observa-se que 20% das tarefas não foram respondidas e 12% das respostas estavam totalmente erradas.

Assim, comparando as respostas do teste e da ficha de trabalho verifica-se que a percentagem de RC é bastante superior no teste de avaliação de conhecimentos do que na ficha de trabalho, do mesmo modo, a percentagem de TNR é muito baixa no teste de avaliação e bastante superior na ficha de trabalho, analogamente verifica-se que a percentagem de RE é superior no teste de avaliação e a percentagem de RPC é bastante superior na ficha de trabalho. Esta situação pode dever-se ao facto dos alunos se sentirem menos responsabilizados pela realização da ficha de trabalho, uma vez que a realização (ou não) da mesma, não iria afetar a classificação final dos estudantes. Assim, na ficha de trabalho, os alunos não tinham tanto rigor nas suas respostas e não tentavam responder quando não sabiam.

5.4. Principais erros cometidos

Neste subcapítulo pretende-se analisar os principais erros que os participantes do estudo cometeram na realização do último teste do 2.º período e na ficha de trabalho implementada.

Para isso, recorreu-se às categorias definidas por Socas (1997), mencionadas por Vale (2010). Assim, ir-se-á utilizar as abreviaturas que o autor definiu para a tipificação dos erros apresentadas na Figura 7. Para além destas, irá ainda ser utilizada a abreviatura RI, para designar as respostas incompletas que não apresentam erros.

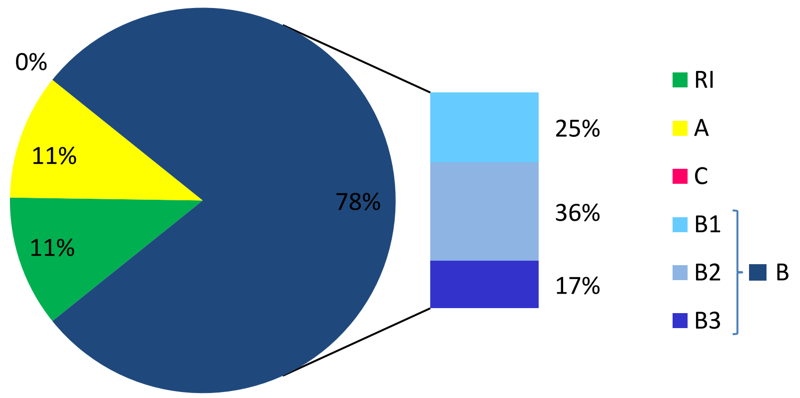


Figura 89: Distribuição dos erros cometidos

Pela análise da Figura 89 é possível observar que a grande maioria dos erros cometidos pelos participantes do estudo, nos dois instrumentos de recolha de dados usados, corresponde à categoria B definida por Socas (1997) (mencionada por Vale (2010)), ou seja, são erros que têm a sua origem na ausência de significado. No entanto, se tivermos em conta as subcategorias de B, verifica-se que os erros da subcategoria B2 são os que ocorrem com mais frequência, ou seja, aqueles que foram causados devido ao uso incorreto de fórmulas, regras ou procedimentos. Os erros da subcategoria B1, ou seja, aqueles que têm origem na aritmética, ocupam também uma parte considerável da representação gráfica. Os terceiros mais frequentes são os da subcategoria B3, que são os que representam imprecisões na linguagem algébrica. As respostas que não contêm erros, porém estão inacabadas, e as respostas cujos erros têm a sua origem num obstáculo cognitivo ocorrem com igual frequência relativa. Por último, os erros da categoria C nunca se verificaram, no entanto, se tivessem sido realizadas entrevistas aos alunos, muito provavelmente estes dados iriam ser alterados, pois com produções escritas apenas não é possível identificar se o erro foi cometido, por exemplo, apenas por uma falta de atenção ou se o aluno, de facto, não sabia como o corrigir.

Observe-se agora alguns exemplos de respostas que contêm os tipos de erros mencionados:

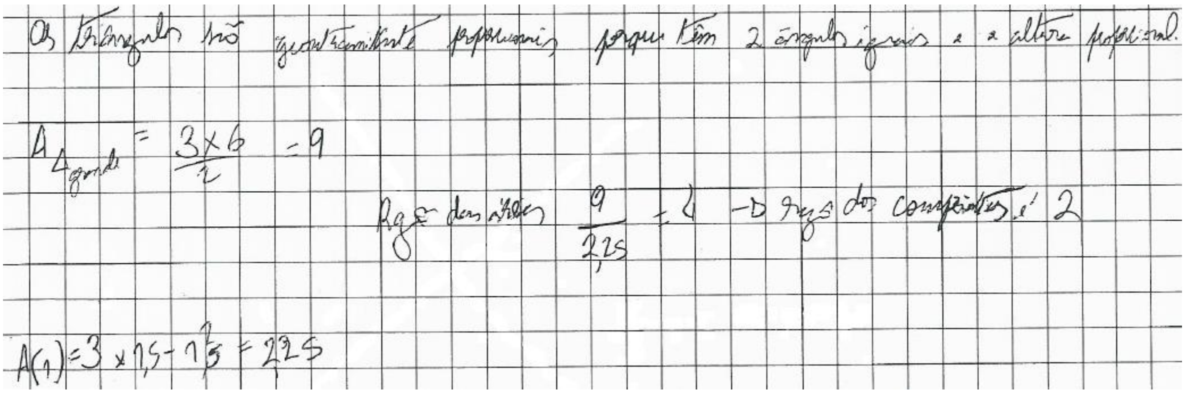


Figura 90: Exemplo de resposta que contém um erro da categoria A – resolução de um aluno à tarefa 7.1 do teste de avaliação

A tarefa 7.1 do teste de avaliação analisado pretendia que os alunos demonstrassem que a área do triângulo a sombreado (ver Figura 14) é dada por: $A(x) = 3x - x^2$. No entanto nesta resolução, o aluno foi calcular a razão entre os lados dos triângulos [OPQ] e do triângulo maior da Figura 14. Deste modo, o aluno utilizou o seu conhecimento fora do contexto (categoria A), uma vez que tal não era pedido.

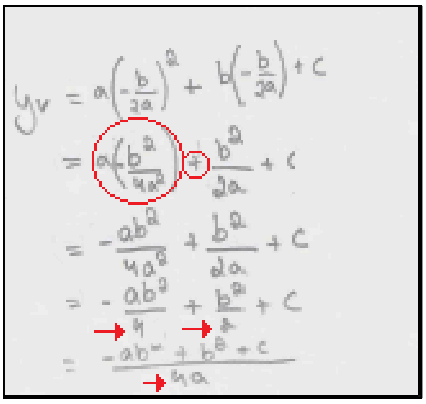


Figura 91: Exemplo de resposta com erros da subcategoria B1 – resolução de um aluno à tarefa 4 da ficha de trabalho

Na Figura 91 é possível verificar que o aluno cometeu vários erros da categoria B1. O primeiro acontece quando o aluno tenta simplificar a expressão $\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$, mantendo o sinal "-". Imediatamente a seguir, o aluno escreve que a multiplicação de dois números com sinais contrários é um número positivo. Na penúltima expressão encontram-se mais dois erros que se enquadram nesta subcategoria, uma vez que o aluno não escreve o a e o a^2 que já estavam no denominador. Por fim, o estudante tenta escrever toda a sua expressão numa única fração, no entanto também não procede corretamente.

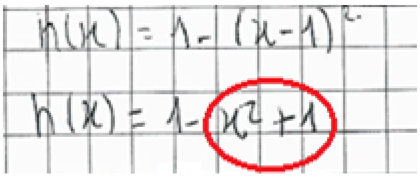


Figura 92: Exemplo de erro da subcategoria B2

O erro mostrado na Figura 92 é da categoria B2 pois o estudante não usa corretamente um dos casos notáveis da multiplicação, sendo por isso um erro com origem na utilização incorreta de fórmulas ou procedimentos.

Figura 93: Exemplo de ero da subcategoria B3

A resolução apresentada na Figura 93 mostra um erro de categoria B3. Esta imprecisão leva a crer que o aluno confunde o sinal de equivalente com o sinal de igual, sendo por isso um erro de linguagem algébrica.

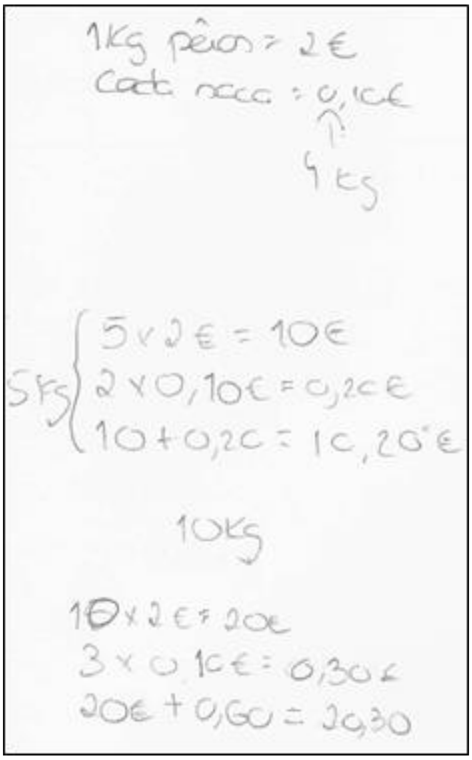


Figura 94: Exemplo de resposta incompleta – resolução de um aluno à segunda tarefa da ficha de trabalho

Nesta resolução, o aluno calcula corretamente o custo de 5*kg* de peras e o custo de 10*kg* de peras. No entanto a resposta está incompleta, uma vez que o custo total de *n kg* de peras não está calculado.

6. Conclusões

Neste capítulo, irei apresentar os principais resultados e conclusões do estudo para responder às questões de investigação propostas.

Inicialmente será realizada uma breve síntese deste trabalho, de seguida, irão ser apresentadas as respostas às questões de investigação e por fim, faço uma pequena reflexão sobre o desenvolvimento deste estudo, apresentando algumas limitações, implicações que este trabalho me trouxe a nível profissional e algumas recomendações para futuras investigações.

A principal finalidade deste estudo foi analisar as características do pensamento algébrico de alunos do 10.º ano de escolaridade. Para isso foram elaboradas duas questões de investigação:

- Quais os níveis de pensamento algébrico mais comuns em alunos que frequentam uma turma do 10.º ano de escolaridade?
- Quais os tipos de erros mais comuns que alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade cometem na realização de tarefas de índole algébrica?

Assim, optou-se por um estudo de natureza qualitativa e na modalidade de estudo de caso exploratório. Para isso, procedeu-se à recolha de dados numa turma do 10.º ano de escolaridade com 25 alunos. Os instrumentos usados para tal efeito foram o último teste de avaliação que os educandos realizaram no 2.º período na disciplina de Matemática e uma ficha de trabalho aplicada dois meses depois.

6.1. Quais os níveis de pensamento algébrico mais comuns de alunos que frequentam uma turma do 10.º ano de escolaridade?

Vários autores tentaram caracterizar o pensamento algébrico, apresentando diversas perspetivas. No entanto, todas elas parecem referir que o pensamento algébrico é um processo de generalização Matemática e de estudo de relações de equivalência e das suas propriedades.

Godino et al. (2012, 2014, 2015) referem que o pensamento algébrico pode ser caracterizado por sete níveis, sendo que os primeiros quatro são mais ajustados ao Ensino Básico e os últimos três mais apropriados para o Ensino Secundário (Godino et al., 2015):

Nível 0: As respostas não incluem características algébricas, a linguagem usada é natural, numérica e pode recorrer a imagens ou gestos. As operações são efetuadas em objetos particulares e em tarefas recursivas, a relação de dois termos consecutivos não implica a determinação de uma regra.

Nível 1: A generalidade aparece de uma forma explícita perante uma linguagem natural, numérica, simbólica, podendo recorrer a imagens ou gestos. Não há operações com objetos intensivos, mas podem aparecer símbolos que os representam. Em tarefas estruturais, podem ser aplicadas relações e propriedades de operações. Em tarefas funcionais, os alunos recorrem ao cálculo com objetos extensivos.

Nível 2: As variáveis são expressas numa linguagem simbólica e literal e os objetos intensivos são reconhecidos, no entanto não são escritos na sua forma canónica. As equações são da forma $Ax \pm B = C$.

Nível 3: Os objetos intensivos são apresentados de maneira simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles. Resolvem-se equações do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$ aplicando-se propriedades estruturais.

Nível 4: Usam-se parâmetros para expressar equações e famílias de funções.

Nível 5: Faz-se um tratamento de parâmetros de modo analítico.

Nível 6: Trabalha-se com estruturas algébricas e faz-se um estudo de adição, subtração, divisão, multiplicação e composição de funções.

Foi nestes sete níveis em que me baseei para responder à primeira questão de investigação.

Assim, os dados analisados levam-nos a concluir que no teste de avaliação (realizado no fim do 2.º período) os alunos trabalhavam muito nos níveis 1 e 2 de pensamento algébrico. Dois meses mais tarde, notou-se uma melhoria significativa no desenvolvimento do pensamento algébrico dos participantes, uma vez que na ficha de trabalho aplicada aos mesmos alunos, havia mais resoluções de níveis 4 e 5 de pensamento algébrico e a percentagem de resoluções de níveis 1, 2 e 3 diminuiu, em comparação com o teste de avaliação.

Tal situação leva-nos a concluir que houve um progresso no desenvolvimento do pensamento algébrico.

No entanto, ao analisar todas as respostas dos alunos às tarefas propostas no teste e na ficha de trabalho, é possível observar que os níveis de pensamento algébrico mais comuns nesta turma do 10.º ano são o 1 e o 2.

6.2. Quais os tipos de erros mais comuns que alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade cometem, na realização de tarefas de índole algébrica?

Para dar início ao estudo do erro, começou-se por analisar a percentagem de respostas corretas, parcialmente corretas, erradas e a percentagem de tarefas não respondidas pelos participantes nas tarefas propostas para a concretização deste estudo.

Pode-se concluir que, no teste de avaliação, a percentagem de respostas corretas foi a mais elevada e a percentagem de tarefas não respondidas foi a mais baixa, no entanto, na ficha de trabalho implementada, a percentagem mais alta foi a das respostas parcialmente corretas, sendo que a percentagem de respostas corretas foi apenas ligeiramente superior à percentagem de tarefas não respondidas. Esta situação pode ter acontecido porque os alunos se sentiam mais responsabilizados e preparados para a realização do teste, uma vez que esse era um momento de avaliação.

Geralmente o erro é visto como um fracasso, no entanto uma análise e reflexão sobre o mesmo pode contribuir para a aprendizagem dos alunos. Segundo Vale (2010), Hadji (1994) refere que o professor deve incentivar os seus alunos a analisar sua própria produção. Com isso, os educandos terão a oportunidade de identificar e compreender os seus erros, podendo assim geri-los, desenvolvendo processos de verificação e autocorreção.

Existem diversos tipos de erros e também diversas formas de os analisar. Para este estudo foram consideradas as categorias definidas por Socas (1997) que Vale (2010) apresentou.

O autor considera três eixos que permitem avaliar a origem do erro aquando da aprendizagem da Álgebra: (A) obstáculos; (B) ausência de sentido; (C) atitudes afetivas e emocionais. Por sua vez, os erros causados pela ausência de sentido são subdivididos em três subcategorias: (B1) erros de Álgebra com origem na aritmética; (B2) erros de procedimento, uso de fórmulas ou regras indevidamente; (B3) erros de Álgebra devido às características da linguagem algébrica.

Nesta turma participante do estudo, os erros cometidos foram maioritariamente da categoria B. No entanto, se tiver em conta as suas subcategorias, verifica-se que os erros da subcategoria B2 são os que ocorrem com mais frequência, seguidos dos erros das subcategorias B1 e B3 e por último, da categoria A. Os erros da categoria C nunca se verificaram, no entanto este facto justifica-se porque não foram realizadas entrevistas aos alunos e deste modo, as produções escritas não chegam para concluir se um determinado erro foi cometido apenas, por exemplo, por uma falta de atenção ou se o aluno, de facto, não sabia como o corrigir.

Assim, os dados analisados levam a crer os erros mais comuns na realização de tarefas de natureza algébrica por esta turma do 10.º ano de escolaridade, foram os erros da categoria B, mais propriamente da subcategoria B2, que são os que são causados devido ao uso incorreto de fórmulas, regras ou procedimentos.

6.3. Reflexão final

Para além da minha reflexão pessoal, irei também expor as principais dificuldades sentidas na concretização deste estudo, as implicações do mesmo e irei propor algumas recomendações para futuras investigações.

Penso que a metodologia de investigação usada foi adequada ao estudo. Bogdan e Biklen (1994) enumeram características para investigações desta natureza e este estudo encaixa-se em todas elas, uma vez que a fonte direta dos dados é uma turma do 10.º ano e os dados recolhidos correspondem às suas produções escritas, sendo estas apresentadas de forma descritiva, uma vez que não interessava apenas saber se o aluno acertou ou errou a tarefa, mas sim as suas produções escritas e os erros que eles cometeram. Para além disso a investigadora é o principal instrumento de recolha de dados, uma vez que no decorrer das aulas fui-me apercebendo como era o normal funcionamento da turma, os erros que eles mais vezes cometiam e as suas formas de pensar.

A modalidade de estudo de caso exploratório também é a que melhor se ajusta, pois o caso em estudo é uma turma do 10.º ano e para a examinar procedeu-se à recolha, análise e interpretação de produções escritas dos alunos. Para além disso, a recolha e análise de dados basearam-se em estudos teóricos preexistentes.

Em termos das limitações do estudo quero referir que a principal foi o tempo. Se houvesse mais tempo, talvez fosse possível elaborar entrevistas aos alunos, podendo deste modo compreender melhor as suas ideias, resoluções e os seus erros. Do mesmo modo, se tivesse mais tempo certamente iria ler mais e desenvolver mais alguns capítulos, nomeadamente o 2.3 - *Tipos de erros no processo de aprendizagem da Álgebra*. Uma outra dificuldade sentida foi a atribuição de níveis a algumas das respostas, principalmente das que não estavam totalmente corretas, uma vez que algumas delas apresentavam características de dois níveis consecutivos.

No que diz respeito à análise de dados, foram analisadas as produções escritas de todos os elementos da turma, no entanto, seria interessante continuar a acompanhar os mesmos alunos até ao final do Ensino Secundário, para estudar o desenvolvimento do seu pensamento algébrico, assistindo deste modo à sua evolução cognitiva. Assim, proponho para eventuais investigações futuras que se acompanhe alguns alunos durante o seu percurso escolar, com o objetivo de analisar o desenvolvimento algébrico dos mesmos. Seria também interessante estudar se o uso de tecnologia em sala de aula, como o *GeoGebra*, o *Excel* ou a calculadora gráfica, promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Este estudo contribuiu para compreender as principais dificuldades que os alunos têm no estudo da Álgebra, bem como as principais causas que levam os alunos a errar respostas. Em termos profissionais, a experiência em Prática de Ensino Supervisionada I e II permitiu-me evoluir enquanto docente, ensinou-me que o trabalho do professor não é apenas dar aulas e fazer testes, há muito mais para fazer, como reuniões ou preparar atividades para os alunos fora do ambiente de sala de aula. Para além disso, apercebi-me do trabalho envolvido na preparação de uma aula, é difícil prever as dúvidas que os alunos vão ter, no entanto convém que o docente esteja preparado para todas elas, uma vez que ele é o principal agente de desenvolvimento do pensamento. Torna-se por isso importante refletir sobre os erros cometidos pelos alunos, para que eles percebam o que estão a fazer de errado e percebam como têm que pensar, ou qual o procedimento mais adequado para resolver as tarefas propostas.

Durante a realização deste relatório de estágio, aprendi muito também com todos os artigos e teses que li. No entanto, a minha fundamentação teórica centra-se essencialmente em cinco autores. Os trabalhos do Professor Godino e do Professor João Pedro da Ponte permitiram-me perceber o que é o pensamento algébrico e quais as suas características, para além disso, com os artigos do Professor Godino, percebi como classificar cada resposta nos diferentes níveis do pensamento algébrico, permitindo-me desse modo responder à primeira pergunta de investigação. A dissertação de mestrado de Vale possibilitou-me responder à segunda questão de investigação, para além disso aprendi que existem diferentes formas de caracterizar o erro e que este pode ser uma oportunidade de aprendizagem. Os artigos de Carreira levaram-me a concluir que o uso de novas tecnologias em sala de aula pode motivar os alunos para a disciplina de Matemática, sendo estes um suporte para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Por fim, a dissertação de mestrado de Nogueira permitiu-me completar leituras anteriormente realizadas, nomeadamente nos capítulos 2.1.1 – *O que é o pensamento algébrico?* e 2.4 – *Tecnologia na sala de aula*.

Assim, a elaboração da fundamentação teórica foi um suporte fundamental na concretização deste relatório de estágio.

Também a análise dos dados foi muito importante, ela veio confirmar algumas teorias que eu tinha formado devido à observação e assistência de aulas, como por exemplo, a maioria dos erros que os alunos desta turma cometem são devido ao uso incorreto de fórmulas, regras ou procedimentos. No entanto também veio refutar outras, como por exemplo, eu pensava que os alunos trabalhavam muito num nível 3 de pensamento algébrico uma vez que estes eram iniciantes no Ensino Secundário.

Para finalizar, queria salientar a importância da reflexão no final de cada trabalho. Não é apenas sobre os erros académicos que devemos refletir, mas também em todos os momentos considerados decisivos. Durante a concretização deste trabalho, a reflexão esteve sempre presente. Agora, ao pensar sobre o trabalho que foi feito, reparo em alguns erros que foram feitos, como por exemplo, devia ter começado a trabalhar mais cedo neste relatório para tentar combater a principal limitação deste estudo, o tempo. Para além disso, a recolha de dados devia ter sido feita mais cedo, pois assim que os dados estivessem analisados, devia ter feito uma breve entrevista aos alunos para que eles explicassem alguns dos raciocínios que tiveram, pois assim seria mais fácil atribuir uma categoria aos erros cometidos.

Referências Bibliográficas

Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática – diferenças na prática da sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 286-299). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação - Secção de Educação Matemática.

Bodgan, R. & Biklen, S (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora. Recuperado em 8 junho, 2015, de http://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao.

Borralho, A. & Barbosa, E. (n. d.). Pensamento Algébrico e exploração de Padrões. Recuperado em 21 janeiro, 2015, de http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16* (2), 81-118.

Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos "nativos digitais" com os "manipulativos virtuais". *Quadrante, 18* (1 e 2), 53-85.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2014a). *Novo Espaço Parte I Matemática A 10.ºano* (1.ª ed.). Porto: Porto Editora.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2014b). *Novo Espaço Parte II Matemática A 10.ºano* (1.ª ed.). Porto: Porto Editora.

Creswell, J. W. (2007). Procedimentos Qualitativos. In M. B. Canto, *Projeto de Pesquisa: Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto* (2.ª ed.) (pp. 184 - 210). Porto Alegre: Artmed.

Duarte, J. (2011). *Tecnologias e pensamento algébrico: Um estudo sobre o conhecimento profissional dos Professores de Matemática*. Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10(2)*. Recuperado em 16 junho, 2015 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_portugues.pdf.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13 – 31. Recuperado em 16 junho, 2015, de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. J. Garcia y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 285-294). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2014). Levels of algebraic reasoning in primary and secondary education. *CERME 9, TWG 4.*

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., F. Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33.1, pp. 127-150.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M.Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: revista de educação*, 2 (2), 49-65.

Ministério da Educação (2002). Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

NCTM (2007), *Princípios e Normas para a Matemática Escolar,* Lisboa: APM.

Nogueira, D. M. (2010). *Desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 10.º ano no tema funções através da resolução de problemas com recurso às TIC*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Minho, Portugal.

Oliveira, O. R. B. (2011). *Adição de vetores: Propriedades*. Recuperado em 16 abril, 2015, de https://www.ime.usp.br/~oliveira/VETORMAISVETOR.pdf.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage &M. Larguier (Eds.), Un panorama de la TAD (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Saraiva, M., Teixeira, A., & Andrade, J. (2010). Estudo das funções no programa de Matemática com problemas e tarefas de exploração. Recuperado em 25 março, 2015, de http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números.* 77, 5-38.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática - 10.º ano de escolaridade.* (2.ª ed.). Lisboa: Ministério da Educação.

Vale, M. L. S. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de caso: Planejamento e métodos.* (2.ª Ed.). Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo I: Autorização do Encarregado de Educação

Autorização do Encarregado de Educação

Excelentíssimo Encarregado de Educação

Sou aluna do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, da Universidade de Aveiro. De momento, encontro-me a frequentar a unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada II, pelo que sou professora estagiária de Matemática na turma do seu educando.

Para a conclusão do Mestrado, devo realizar um Relatório Final de Estágio que implicará a recolha de dados empíricos. Esses dados seriam provenientes de registos de avaliação e, eventualmente, de respostas escritas do seu educando às tarefas propostas em ambiente de sala de aula, bem como de uma possível ficha de trabalho a implementar. O anonimato dos participantes é garantido.

Face ao exposto, solicito a sua autorização para a participação do seu educando neste estudo que tem como propósito investigar o pensamento algébrico desta turma.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Sara Alexandra Andrade Vaz)

✂--

Declaro que ☐ Autorizo ☐ Não autorizo

a recolha de dados do meu educando referentes a registos de avaliação, tarefas efetuadas em sala de aula, bem como a sua participação na realização da possível ficha de trabalho a implementar.

____ de março de 2015

Assinatura do Encarregado de Educação: ____

Assinatura do aluno: ____

Anexo II: Ficha de trabalho 10.º ano

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Nome da Escola

Ficha de trabalho: O Estudo do pensamento algébrico

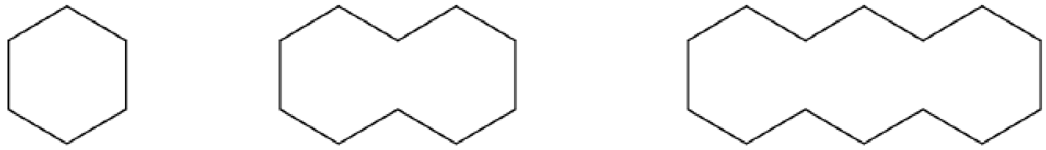
Nome:____

Número:__________ Ano/Turma:__________

A presente ficha de trabalho é composta por 4 questões. Com elas pretende-se estudar o nível do pensamento algébrico dos alunos desta turma. Assim, a ficha de trabalho não terá caráter avaliativo. Não é permitida a consulta do manual nem do caderno de apontamentos.

Tarefa 1:

Considera a seguinte sequência de figuras:



Representa os dois termos seguintes da sequência e indica o número de segmentos necessários para construir cada uma. Explica como procedeste.

Resolução:

Tarefa 2:

Numa barraca, vende-se o *kg* de peras a 2€ e cada saco a 0,10€. Supõe que cada saco leva 4 *kg* de peras. Quanto gastarias se comprasses 5 *kg* de peras? E se comprasses 10 *kg*? E se comprasses *n kg* de peras?

Resolução:

Tarefa 3

Utilizando a calculadora gráfica representa graficamente funções reais de variável real da família $f(x) = mx + b$, com m e b reais. Estuda as representações gráficas de funções desta família e indica:

- A existência e o número de zeros;
- Intervalos de monotonia;

Resolução:

Tarefa 4

Dada uma função do 2.º grau $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, mostre que as coordenadas do vértice V da parábola descrita por essa função são $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $\Delta = b^2 - 4ac$ e $a \neq 0$.

Sugestão: Considera a função $y = a\,(x-h)^2 + k, a \neq 0$. Nota que o vértice da parábola representativa da função tem coordenadas $V(h,k)$.

Resolução:

Anexo III: Ficha de atividades entregue aos alunos

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Nome da Escola

Matemática – 10º ano | março 2015

Nome:____ Turma:______ Nº____

A função quadrática em contexto real

Exercício 1:

Uma criança lança uma bola ao ar. A distância a que a bola está do chão (em metros), ao longo do tempo t (em segundos) é dada pela função h definida por:

$$h(t) = -\frac{7}{10}t^2 + 3t + \frac{6}{5}.$$

Considera que a bola termina o movimento quando atinge a superfície.

1. Recorrendo à calculadora gráfica, faz uma representação gráfica da função h e, tendo em consideração o contexto do problema, indica o domínio e o contradomínio de h. Sempre que achares pertinente conserva uma casa decimal.

2. Interpreta e descreve todas as informações, acerca da situação, que obténs através da representação gráfica da alínea anterior. Conserva uma casa decimal sempre que achares pertinente, nas coordenadas dos pontos considerados relevantes.

Exercício 2:

A Francisca tem uma corda com 1 metro de comprimento e pretende construir um retângulo com ela. Qual o retângulo de maior área que pode construir utilizando apenas essa corda?

Adaptado de Teixeira et al. (1997, p. 53)

Exercício 3:

O preço que é pago (em €) ao lenhador de uma dada região varia de acordo com a área que ele corta (em m^2) da floresta mais próxima. Essa relação é dada pela função p, em que $p(x) = -0{,}4x^2 + 200x$. Por outro lado, a taxa de impostos que o lenhador tem que pagar (em €) em função da área cortada (em m^2) é dada pela função t, definida pela expressão $t(x) = \frac{3}{2}x^2 - 18x$.

1. Tomando em consideração que a floresta mais próxima tem 250 m^2 de área e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, indica o domínio e contradomínio das funções p e t. Apresenta os extremos do intervalo arredondado às unidades.

2. Quando é que a taxa de impostos é superior ao preço que pagam ao lenhador por área cortada? Apresenta todos os cálculos que efetuaste.

3. Qual a área de floresta, em m^2, que o lenhador deve cortar de modo a que tenha lucro máximo?

Anexo IV: Nível de pensamento algébrico de cada participante

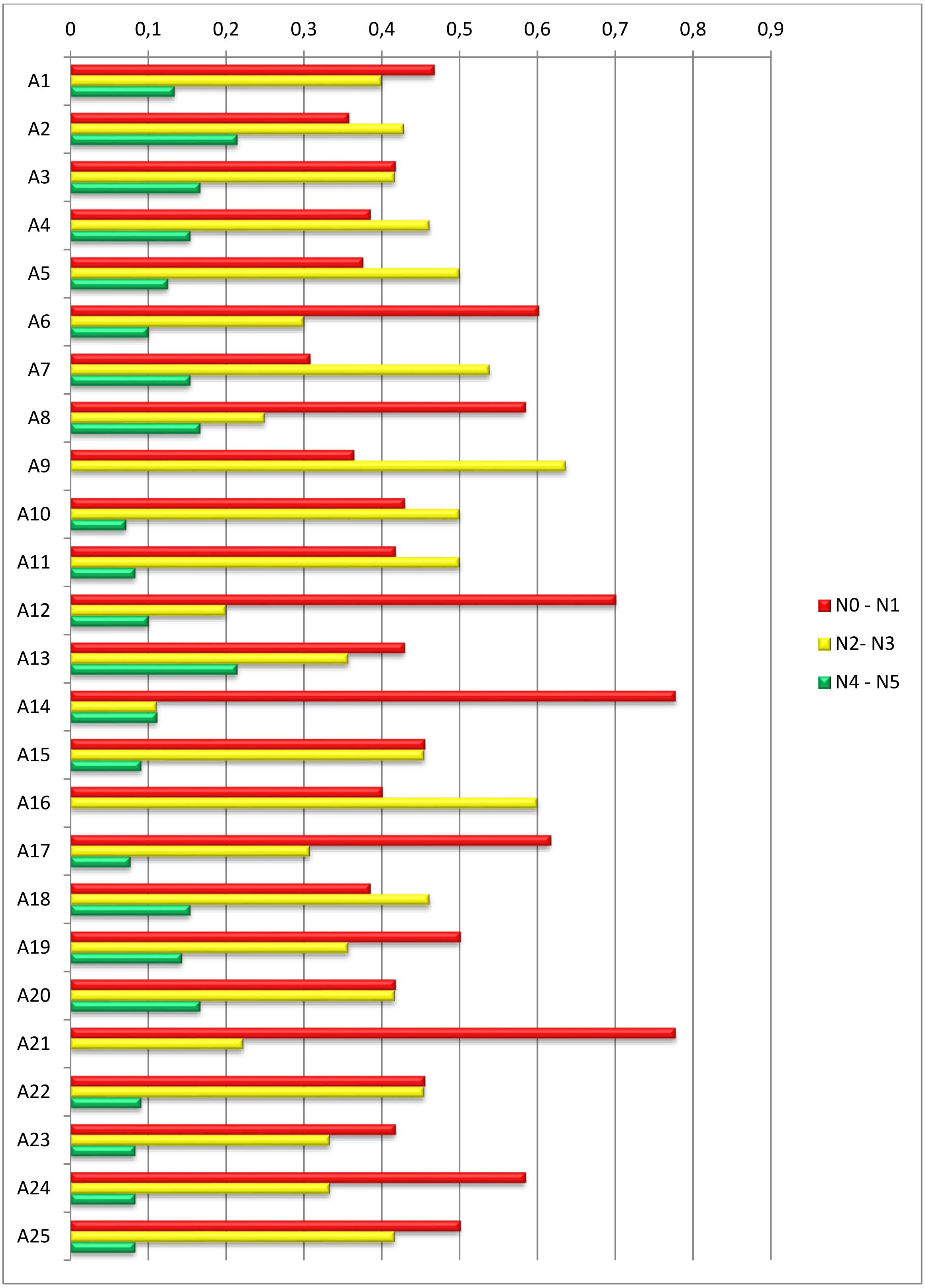


Figura 95: Frequência relativa do nível de pensamento algébrico de cada participante